

PSI
Physique · Modélisation · Chimie
2022

Sous la coordination de

Julien DUMONT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Jacques DING
École Polytechnique

Julien DUMONT
professeur en CPGE

Nicolas GOY
professeur en CPGE

Alexandre HERAULT
professeur en CPGE

Augustin LONG
professeur en CPGE

Tom MOREL
professeur en CPGE

Stéphane RAVIER
professeur en CPGE

Jimmy ROUSSEL
professeur agrégé en école d'ingénieurs

Louis SALKIN
professeur en CPGE

Sommaire thématique de physique

2015 – 2022

e3a MP Physique et Chimie (2021+2022)		•		•	•		•			•	•				
e3a PC Physique et Chimie (2021+2022)		•					•	•	•	•					
e3a PSI Physique et Chimie (2021+2022)		•			•			•	•	•					
CCINP MP Physique			•	••	••		••			•••	•••	••	••		
CCINP MP Physique et Chimie	••	••			•		••			••	••	•	•		
CCINP PC Physique	••	••		•	•		••	••	•	••	••	••	••		
CCINP PC Modélisation Phys-Chimie	•	••		•			•						•	••	
CCINP PSI Physique et Chimie	••	••		•	••	••	••	••	•	••	•				
CCINP PSI Modélisation numérique	•	••			••	•	•	••	•	••				••	
Centrale MP Physique et Chimie 1	••	••	•	•	•		••			••			••		
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•		••	•		••			••	••	•			
Centrale PC Physique 1	•			••	•		•	••	••	••	••	••	••		
Centrale PC Physique 2	••	•	•	••	•		••	••	••	•	••	••	••		
Centrale PSI Physique et Chimie 1	••	••		•	•	••	•	••	•	•					
Centrale PSI Physique et Chimie 2	••	•			••	•	••	••	•	••	•				
Mines MP Physique 1	•	••	•		•		••		•	••	•	•	•		
Mines MP Physique 2	••	•	••	••	•		••		•	••	•	••	•		
Mines PC Physique 1	••	•	•		•		••	••	•	••	••	••	•		
Mines PC Physique 2	•	•		•			••	••	••	••	••	••	•		
Mines PSI Physique 1	•	••			••		••	••	••	••	••	•			
Mines PSI Physique 2	•				••	••	••	••	••	••	••	•			
X/ENS MP Physique	••		•	•			••		•	•	•				
X/ENS MP Physique et SI	•	••	•	•	••		••		•	•	•	•	•		
X/ENS PC Physique A	••	•			•		••	••	•	••	••	••	•		
X/ENS PC Physique B	•	•		•			••	••	••	••	•	•	•		
X/ENS PSI Physique	•	•		••	••	•	••		••	•	•	•	•		
X/ENS PSI Physique-Modélisation	•	•		•	••	••	••	••		•					••
	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Physique statistique	Électrostatique et magnéto-statique	Électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme	Optique	Physique quantique	Informatique tronc commun		

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
E3A			
Physique et Chimie	Conception d'un prototype de machine à pancakes. <i>électronique, électromagnétisme, diffusion thermique, mécanique des fluides, cinétique chimique, thermodynamique</i>	11	23
CONCOURS COMMUN INP			
Physique et Chimie	Développement durable. <i>thermodynamique, mécanique du point, transferts diffusifs, électromagnétisme, induction, machine synchrone, oxydoréduction, diagrammes E-pH, courbes courant-potentiel</i>	38	53
Modélisation et Ingénierie numérique	Modélisation de la prévention des tsunamis. <i>mécanique du point, mécanique des fluides, induction</i>	69	85
CENTRALE-SUPÉLEC			
Physique et Chimie 1	Modélisation linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Étude de deux composants de l'atmosphère : le dioxygène et l'ozone. <i>thermodynamique, mécanique des fluides, ondes</i>	99	109
Physique et Chimie 2	Sécurité d'une plongée à très grande profondeur : exemple de l'expédition Deepsea Challenger. <i>thermodynamique, mécanique, électromagnétisme, ondes sonores, électrochimie</i>	129	138

MINES-PONTS

Physique 1	Fourier dans tous ses états. <i>électronique numérique, ondes sonores, diffusion thermique</i>	154	161
Physique 2	Étude physique d'un capteur de position. <i>électromagnétisme, induction électromagnétique, couplage ferromagnétique, électronique, mécanique du point, oscillateur</i>	180	191
Chimie	Chimie et énergie. <i>cristallographie, thermodynamique, oxydoréduction, diagrammes E-pH, solutions aqueuses</i>	209	215

POLYTECHNIQUE-ENS

Physique	Étude et mesure des séismes. <i>physique ondulatoire, induction, électrocinétique, mécanique en régime forcé</i>	223	239
Physique et Modélisation	Le cœur. <i>mécanique, mécanique des fluides, mécanique du solide, électrocinétique, informatique</i>	259	284

FORMULAIRES

Constantes chimiques	304
Constantes physiques	307
Formulaire d'analyse vectorielle	308
Classification périodique	312

Sommaire thématique de chimie

2015 – 2022

e3a MP Physique et Chimie (2021+2022)	•			•		•	•														
e3a PC Physique et Chimie (2021+2022)	•	•	•				•			•	•										
e3a PSI Physique et Chimie (2021+2022)		•	•	•	•		•														
CCINP MP Physique et Chimie	••	••	••	••	••	••	••	••												•	
CCINP PC Chimie	••	••	••	••	•	•	••	••	••	••	••	••	••	••							
CCINP PC Modélisation Phys-Chimie			•							•										•••	
CCINP PSI Physique et Chimie	•	••		••	••	••	•	•		•											
Centrale MP Physique et Chimie 1	••	•	••	•			••														
Centrale MP Physique et Chimie 2	••	••	••	••	••	••	••														
Centrale PC Chimie	•	••	••	••	••	••	•	•	•	•	••	••	••	••	•					•	
Centrale PSI Physique et Chimie 1	••	•		•			•														
Centrale PSI Physique et Chimie 2	•	•	•	••	••	••	••	••	•												
Mines MP Chimie	••	••	•	••	••	••	••	••													
Mines PC Chimie	••	••	••	••	••	•	••	••	•	••	••	••	••	••	•					•	
Mines PSI Chimie	••	••	•	••	••	••	••	••	•	•											
X/ENS PC Chimie	•	••	••	••		•	••	•	••	•	••	••	••	••	•						
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination	Informatique	tronc commun								

SESSION 2022



PSI9PC

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI**PHYSIQUE-CHIMIE****Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois parties indépendantes.

- Les données utiles à la résolution du sujet figurent en fin de chaque partie.
- Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le ou la candidat(e).
- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans l'évaluation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.
- Les résultats numériques exprimés sans unité ou avec une unité fautive ne sont pas comptabilisés.

Conception d'un prototype de machine à pancakes

Traditionnellement servis au petit-déjeuner dans les pays d'Amérique du Nord (Canada, États-Unis), accompagnés par exemple de sirop d'érable, les pancakes sont des crêpes plus petites (5 à 10 cm de diamètre) et plus épaisses que les crêpes classiques. Ils sont aujourd'hui appréciés et dégustés dans le monde entier. Ce sujet étudie certains aspects de la conception d'un prototype de machine à poêles et distributeur de pâte à pancakes, transportable et peu encombrant, permettant de cuire à la maison des pancakes authentiques de manière ergonomique et automatisée.

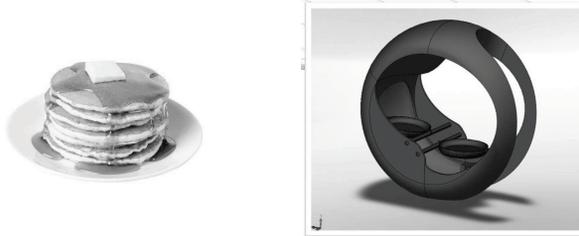


Figure 1 – À gauche : assiette de pancakes nappés de sirop d'érable. À droite : perspective de design de la machine à pancakes, en vue de sa commercialisation

Partie I - Chauffage des poêles par induction

Le système est constitué de deux poêles. Lorsque la première poêle a cuit une face du pancake, un système de roue-vis sans fin programmé par un actionneur (non détaillé dans ce sujet) met en rotation cette poêle et projette ainsi le pancake dans la seconde poêle, chargée de cuire l'autre face. Plusieurs options sont envisageables pour chauffer les poêles : gaz, résistance chauffante, induction (voir **tableau 1**). Le chauffage par induction permet d'obtenir une bonne saisie de la pâte à pancakes, tout en satisfaisant des exigences de sécurité et en minimisant l'encombrement.

Système / Contrainte	Sécurité	Encombrement	Saisie de la pâte
Gaz	–	–	+
Résistance chauffante	+	–	–
Induction	+	+	+

Tableau 1 – Comparaison des différents modes de chauffage envisagés

Après avoir choisi l'alimentation et l'onduleur, l'objectif de cette partie est de dimensionner le nombre de spires de la bobine permettant d'obtenir une température de poêle de 160 °C. Cette condition est nécessaire à l'obtention d'un pancake bien cuit, doré et savoureux.

I.1 - Onduleur RLC série

Afin de concevoir le module à induction, on choisit une alimentation électrique pouvant fournir 3 A en continu (régime permanent stationnaire) pour une tension maximale de 30 V. De telles puissances nécessitent de dimensionner en conséquence l'onduleur et les câbles, notamment afin d'éviter la détérioration... voire la "cuisson" de composants électroniques !

On étudie un onduleur de tension autonome de période T , à commande symétrique, dont le montage est représenté sur la **figure 2**. Les quatre interrupteurs bidirectionnels K_1 , K_2 , K_3 , K_4 sont supposés idéaux et commandés électriquement de telle façon que :

- pour $nT < t < (n + 1/2)T$, avec $n \in \mathbb{N}$: les interrupteurs K_1 et K_3 sont fermés, les interrupteurs K_2 et K_4 sont ouverts ;
- pour $(n + 1/2)T < t < (n + 1)T$: les interrupteurs K_1 et K_3 sont ouverts, les interrupteurs K_2 et K_4 sont fermés.

Le générateur est une source de tension idéale de force électromotrice E constante. La charge est un circuit RLC série, l'inductance L étant celle de la bobine destinée au chauffage.

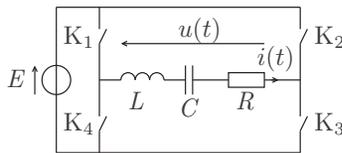


Figure 2 – Onduleur à circuit RLC série : schéma du montage

- Q1.** Rappeler brièvement l'objectif d'un onduleur. Préciser si la charge RLC série est une source de courant ou de tension en justifiant la continuité d'une grandeur électrique dans ce circuit.
- Q2.** Tracer soigneusement la courbe $u(t)$ sur deux périodes.
- Q3.** Écrire l'équation différentielle liant à tout instant t , la tension $u(t)$ et l'intensité du courant $i(t)$ et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt}. \quad (1)$$

On explicitera les expressions de Q (facteur de qualité) et de ω_0 (pulsation propre) en fonction de R , L et C .

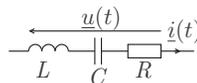


Figure 3 – Association RLC série : analyse fréquentielle

Considérons une tension $u(t)$ sinusoïdale de pulsation ω . On note $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$ les grandeurs complexes respectivement associées aux quantités $u(t)$ et $i(t)$ rappelées sur la **figure 3**. En notant j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, on définit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{u}(t)}. \quad (2)$$

- Q4.** Préciser la dimension de $\underline{H}(j\omega)$, puis l'exprimer en fonction de R , ω , ω_0 et de Q . Déterminer le comportement de son module $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ pour les grandes et les petites pulsations.
- Q5.** Déterminer littéralement puis numériquement la valeur maximale de G .
- Q6.** Caractériser le filtrage réalisé (nature, ordre). Justifier l'intérêt d'ajuster la période du signal de commande afin d'avoir $\omega = \omega_0$. Calculer numériquement la fréquence f associée.

I.2 - Puissance induite dans la poêle

Le circuit électrique précédent permet de faire parcourir un courant sinusoïdal d'intensité

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (3)$$

dans une bobine plate enroulée en spirale, schématisée sur la **figure 4**. Le champ magnétique créé par cette distribution de courant est complexe ; on se contente de comprendre le principe du chauffage par induction avec un circuit plus simple : une unique spire circulaire de centre O et de rayon R , parcourue par une intensité $i(t)$. Dans la suite, on travaille dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , muni de la base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

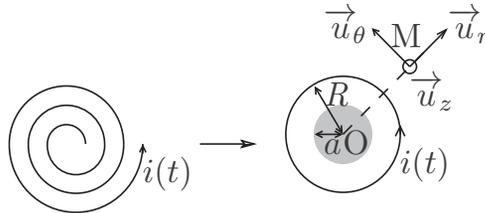


Figure 4 – Bobine : schéma et modélisation

On pose dans le plan de cette spire une poêle, assimilée à un cylindre de rayon $a < R$ et d'épaisseur e , de perméabilité magnétique relative μ_r et de conductivité électrique γ . Dans un souci de simplification, on suppose que le champ magnétique \vec{B} créé par la spire dans la poêle est uniforme. En notant μ_0 la perméabilité magnétique du vide, on donne :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2R} \vec{u}_z. \quad (4)$$

- Q7.** Rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday. On donne le théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (5)$$

où S désigne une surface s'appuyant sur le contour fermé \mathcal{L} .

Obtenir une formulation globale de l'équation locale de Maxwell-Faraday.

e3a Physique et Chimie PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Louis Salkin (professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Dumont (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE).

Ce sujet, composé de trois parties indépendantes, porte sur la conception d'un prototype de machine à pancakes.

- La première partie est consacrée au chauffage des poêles par induction. Après avoir étudié le principe d'un onduleur RLC série, on cherche à exprimer la puissance électromagnétique induite dans la poêle. On s'intéresse ensuite à l'influence du nombre de spires de la bobine sur la température de celle-ci. Cette partie fait appel à des notions d'électronique, d'électromagnétisme et de thermodynamique à travers la diffusion thermique.
- La deuxième partie porte sur le déversoir de pâte. On développe deux modèles successifs d'écoulement de la pâte à pancakes, vue comme un fluide parfait puis visqueux, permettant d'exprimer la durée de cet écoulement à travers le déversoir et de la comparer à l'expérience. Cette partie aborde la dynamique des fluides.
- La troisième partie est dédiée au sirop d'érable. On étudie tout d'abord un manchon tournant enduit de sirop d'érable. Par une étude hydrodynamique, on cherche à déterminer la masse maximale de sirop que l'on peut maintenir autour du cylindre en rotation. Le sujet se termine par des questions de chimie consacrées à la réaction d'inversion du saccharose en glucose et fructose. Après une description thermodynamique et cinétique de celle-ci, on propose un protocole de mesure de la proportion de saccharose dans le sirop d'érable.

Ce sujet explore des thématiques variées et permet ainsi de revoir de nombreux chapitres des première et deuxième années. Il ne contient pas de grosses difficultés. La troisième partie est plus originale ; l'énoncé y donne régulièrement des résultats intermédiaires permettant de ne pas rester bloqué. C'est un sujet agréable et bien adapté aux révisions.

INDICATIONS

Partie I

- 1 La bobine impose la continuité de l'intensité traversant la charge RLC série.
- 4 Passer l'équation différentielle de la question 3 en notation complexe permet d'aboutir rapidement à l'expression de $\underline{H}(j\omega)$.
- 8 Choisir un contour \mathcal{L} circulaire de rayon r .
- 9 Utiliser la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.
- 13 Appliquer le 1^{er} principe de la thermodynamique entre les instants t et $t + dt$ à une tranche élémentaire d'épaisseur dx et de section S au repos macroscopique.

Partie II

- 19 Utiliser le résultat de la question 17 en remplaçant $v_1(t)$ par $-dh_p/dt$.
- 22 En ordre de grandeur, on a $v_0 \sim h_0/\tau_{\text{exp}}$.
- 23 La relation de Bernoulli généralisée s'écrit

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 + \Delta P_c$$

Le rétrécissement de section étant négligé, l'incompressibilité de l'écoulement implique l'égalité des vitesses, soit $v_1 = v_2$.

Partie III

- 28 Le changement de variable $u = r - a$ permet d'alléger le calcul de l'intégrale.
- 30 Dériver la fonction F par rapport à h , puis trouver la valeur $\tilde{h} > 0$ pour laquelle cette dérivée s'annule. Il faut ensuite assurer $F(\tilde{h}) \leq 0$ pour que l'équation $F(h) = 0$ admette une solution positive.
- 31 La masse maximale par unité de longueur de cylindre vaut $T\rho Q_{\text{max}}$, où T est la période de rotation du cylindre.
- 35 Intégrer, entre les températures T_1 et T_2 , la loi d'Arrhenius

$$\frac{d(\ln k)}{dT} = \frac{E_a}{RT^2}$$

- 38 Soustraire les relations obtenues aux questions 36 et 37. Exploiter la relation de Gibbs-Duhem puis l'égalité

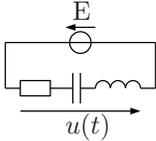
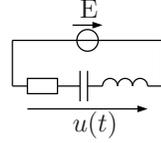
$$S_{\text{eau}}^{*,\text{liq}} - S_{\text{eau}}^{*,\text{sol}} = \frac{\Delta_{\text{fus}}H}{T_{\text{fus}}}$$

- 39 Utiliser le développement limité $\ln(1 - x_{\text{sucré}}) \simeq -x_{\text{sucré}}$.
- 40 La solution contient 15% de sirop d'érable en masse, soit $m_{\text{sucré}}/m_{\text{eau}} = 15/85$.
- 41 Poser le bilan de quantité de matière de la réaction, en l'absence de glucose et de fructose à l'état initial.

I. CHAUFFAGE DES POÊLES PAR INDUCTION

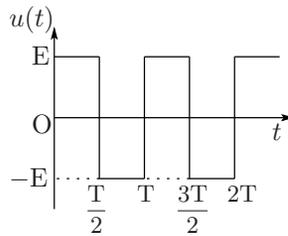
1 Un onduleur permet de **convertir une grandeur continue en une même grandeur alternative**. Ici, la grandeur est la tension. La présence de la bobine impose la continuité de l'intensité traversant la charge RLC série : cette charge se comporte donc comme une **source de courant**.

2 Pour $nT < t < (n + 1/2)T$, le montage est équivalent à celui représenté ci-contre. La loi des mailles donne $u(t) = E$.



Pour $(n + 1/2)T < t < (n + 1)T$, le montage est équivalent à celui représenté ci-contre. Par la loi des mailles, $u(t) = -E$.

On en déduit le chronogramme ci-dessous :



3 Décomposons la tension aux bornes de la charge RLC :

$$u = u_L + u_C + u_R = L \frac{di}{dt} + u_C + Ri$$

En dérivant cette relation et avec $i = C du_C/dt$, on obtient

$$\frac{du}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt}$$

Divisons cette équation par L puis identifions-la avec celle donnée dans l'énoncé,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

4 D'après la loi d'Ohm, la quantité \underline{H} est homogène à l'**inverse d'une résistance**. Passons l'équation différentielle de la question précédente en notation complexe, sachant qu'en complexe, dériver correspond à multiplier par $j\omega$ la grandeur complexe associée :

$$\frac{j\omega}{L} \underline{u} = \left[(j\omega)^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right] \underline{i}$$

Ainsi,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{j\omega/L}{(j\omega)^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$$

En divisant par $j\omega\omega_0$,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1/(L\omega_0)}{j\omega/\omega_0 + 1/Q + \omega_0/(j\omega)}$$

On a montré à la question précédente que $R/L = \omega_0/Q$. En injectant ce résultat,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1/R}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$$

• Aux petites pulsations, $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{j\omega}{RQ\omega_0}$

On en déduit $\underline{G}(\omega) \sim \frac{\omega}{RQ\omega_0}$

• Aux grandes pulsations, $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{\omega_0}{j\omega RQ}$

Ainsi, $\underline{G}(\omega) \sim \frac{\omega_0}{RQ\omega}$

5 D'après la question précédente,

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1/R}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}$$

La grandeur $G(\omega)$ est maximale lorsque la quantité $(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2$ est minimale. Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, son minimum est 0 : cela se produit lorsque $\omega = \omega_0$. Il vient

$$G_{\max} = \frac{1}{R} = 1,4 \cdot 10^{-1} \Omega^{-1}$$

6 Les questions 4 et 5 illustrent un filtrage de type **passé-bande d'ordre 2**. Maximiser la puissance de chauffage revient à maximiser l'amplitude du champ magnétique créé par la bobine, soit aussi l'amplitude du courant qui la traverse. Or, la question 5 a montré que $G(\omega) = |i/u|$ est maximal pour $\omega = \omega_0$. La fréquence associée s'écrit

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

AN:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{(0,25 \cdot 10^{-3}) \times (68 \cdot 10^{-9})}} = 39 \text{ kHz}$$

Évaluons numériquement l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur. En notation complexe,

$$i = C j\omega u_C$$

et en $\omega = \omega_0$, $G_{\max} u = C j\omega_0 u_C$

En prenant $|u| = E$, $|u_C| = \frac{E}{RC\omega_0} = 104 \text{ V}$

Cette tension est supérieure à la limite de sécurité de 50 V pour les tensions alternatives à 50 Hz. À la fréquence du montage, les dangers ne sont pas du tout les mêmes qu'à 50 Hz et sont encore mal connus. Il y a probablement moins de risques d'électrisation profonde avec atteinte cardiaque, mais le risque de brûlure est augmenté. Quoi qu'il en soit, on ne doit pas toucher le circuit pendant son fonctionnement.

CCINP Physique et Chimie PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Alexandre Hérault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Dumont (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet a pour thème le développement durable. Il est composé de six parties indépendantes.

- Dans la partie I, consacrée à la chimie, on s'intéresse au traitement des eaux rejetées par l'industrie du cuir. On cherche à éliminer les résidus de chrome, puis de cyanure, et à récupérer de l'or pouvant être présent dans les effluents. L'oxydoréduction est le thème central de cette partie. On travaille sur des diagrammes potentiel-pH et des courbes courant-potentiel. Les questions restent dans l'ensemble très classiques.
- La deuxième partie aborde le processus de décantation dans le traitement des eaux. Au moyen d'une approche statique puis dynamique, on décrit les mécanismes gouvernant le mouvement de particules polluantes dans un bassin d'eau, en mettant en évidence la compétition entre sédimentation et diffusion.
- Une résolution de problème est proposée dans la troisième partie. L'objectif est d'évaluer, au moyen des données numériques fournies, le nombre de foyers pouvant être alimentés par une ferme solaire constituée de panneaux photovoltaïques.
- La quatrième partie présente un séparateur à courants de Foucault. Reposant sur le phénomène d'induction électromagnétique, ce système est capable de trier les déchets selon leurs propriétés électriques et magnétiques. On développe et met en équation le fonctionnement de ce dispositif.
- Dans la cinquième partie, on exploite la combustion du biométhane permettant de faire fonctionner une installation avec une turbine à gaz. On s'intéresse au cycle thermodynamique décrit par cette machine ditherme motrice et on détermine les échanges d'énergie sur les différentes étapes de ce cycle.
- Enfin, la sixième partie est consacrée à la machine synchrone. Dans cette partie proche du cours, on développe les raisonnements et équations permettant de comprendre le principe de fonctionnement de cette machine.

Ce sujet intéressant aborde des thématiques variées tout en suivant le fil rouge du développement durable. Sa difficulté n'est pas excessive, les questions posées sont assez classiques. Le fait que les parties soient indépendantes offre la possibilité de réviser certains chapitres de manière ciblée, selon les besoins ou les envies.

INDICATIONS

- 1 La réaction de transfert de protons est en fait donnée quelques lignes plus bas dans l'énoncé.
- 2 Se placer à l'apparition du premier cristal et utiliser la relation de l'équilibre.
- 3 Attention à la convention de tracé sur la concentration en élément chrome. Il y a deux atomes de chrome dans $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$.
- 4 On rappelle que $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,06 \text{ V}$, valeur absente des données de l'énoncé.
- 5 Si l'on superposait les domaines des espèces du cyanure, où serait le domaine de CN^- par rapport à celui de ClO^- ?
- 6 Il s'agit de la médiamutation qui forme du dichlore.
- 8 Aucun courant ne doit circuler dans l'électrode de travail.
- 11 Quelle espèce risque-t-on de réduire en abaissant trop le potentiel ?
- 17 En régime permanent, on a la relation

$$\vec{j}_D + \vec{j} = \vec{0}$$

En déduire l'équation différentielle vérifiée par la densité $n(z)$ et la résoudre.

- 18 Exprimer de deux manières différentes le nombre de particules présentes dans une tranche de bassin d'épaisseur dx : d'une part en fonction de N_0 , d'autre part au moyen d'une intégrale sur la fonction $n(z)$.
- 22 Supposer l'onde lumineuse plane, progressive et monochromatique. Déterminer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting en fonction de E_0 et calculer son flux à travers la surface de la ferme solaire pour obtenir la puissance rayonnée. Connaissant le rendement des cellules photovoltaïques, en déduire la puissance électrique récupérée.
- 24 Dans une description volumique, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_L = \int_{\tau} \vec{j} \, d\tau \wedge \vec{B}$$

La taille de la particule étant très petite devant $1/k$, $\cos^2(\omega t - kx)$ peut sortir de l'intégrale.

- 26 Exploiter le fait que $V_1 > V_3$.
- 28 Écrire les équations de réaction de combustion des deux carburants en présence de O_2 , les produits étant CO_2 et H_2O . Penser à les équilibrer, puis utiliser les pouvoirs calorifiques de chaque carburant fournis dans l'énoncé.
- 29 La transformation subie par le fluide dans la turbine (étape 2-3) est isentropique.
- 36 Exploiter le graphe de la question précédente et le principe de superposition.
- 42 Pour l'analyse de stabilité du fonctionnement moteur, étudier l'effet d'une perturbation sur θ_0 , induite par exemple par un freinage du rotor, et écrire un critère sur le couple $\langle \Gamma_z \rangle$ permettant d'assurer un fonctionnement stable.

DÉVELOPPEMENT DURABLE

I. TRAITEMENT DES EFFLUENTS ET RÉCUPÉRATION DE MÉTAUX PRÉCIEUX

1 En attribuant à l'oxygène le nombre d'oxydation $-II$, on obtient pour le chrome dans les différentes les espèces les nombres d'oxydation suivants :

espèces	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$	CrO_4^{2-}	Cr^{3+}	$\text{Cr}(\text{OH})_3(\text{s})$	Cr^{2+}	$\text{Cr}(\text{s})$
n.o.(Cr)	+VI	+VI	+III	+III	+II	0

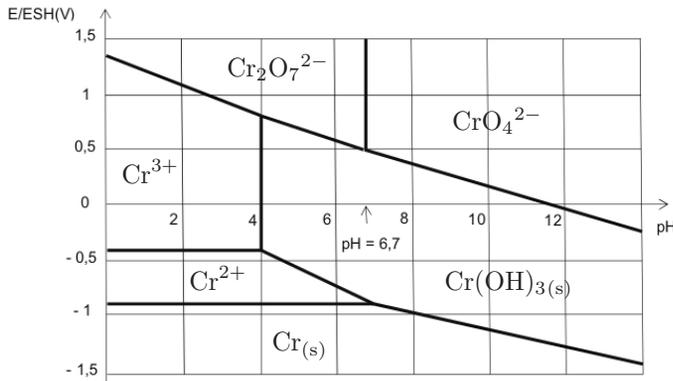
Les espèces $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et CrO_4^{2-} sont au même degré d'oxydation pour le chrome. On peut écrire le transfert de proton suivant entre elles :



Ceci montre que $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ est l'acide (donneur de protons) et CrO_4^{2-} est la base (accepteur de protons).

L'énoncé répond lui-même à cette question : l'équation de la réaction de transfert de protons est donnée juste quelques lignes plus bas. Il est toujours utile de parcourir rapidement l'énoncé avant de commencer à composer.

Dans un diagramme E-pH, les espèces les plus oxydées sont en haut et les espèces basiques sont à droite. On attribue donc les domaines du diagramme comme suit :



2 On lit sur le diagramme que l'hydroxyde de chrome III précipite à partir de

$$\text{pH} = 4$$

À l'apparition du premier cristal de précipité, on a

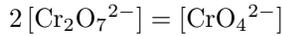
$$K_s = \frac{[\text{Cr}^{3+}][\text{OH}^-]^3}{(c^\circ)^4}$$

Or, $\text{pH} = 4$ et $[\text{Cr}^{3+}] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$

d'où

$$K_s = 0,1 \times (10^{-10})^3 = 10^{-31}$$

3 On lit graphiquement que le pH de la frontière est égal à 6,7. D'après la convention de tracé, sur la frontière,



de sorte que les concentrations en élément chrome soient identiques pour les deux composés. Par ailleurs, la concentration totale en élément chrome dissous est

$$2[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] + [\text{CrO}_4^{2-}] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$$

d'où $[\text{CrO}_4^{2-}] = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = 0,025 \text{ mol.L}^{-1}$

L'équilibre de la réaction (1) impose

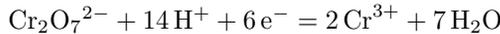
$$K_1^\circ = \frac{[\text{CrO}_4^{2-}]^2 [\text{H}^+]^2}{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] (c^\circ)^3}$$

soit
$$K_1^\circ = \frac{(5 \cdot 10^{-2})^2 \times 10^{-2 \times 6,7}}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 10^{-14,4}$$

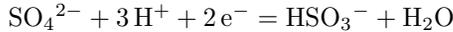
Ainsi,

$$\boxed{\text{p}K_1 = 14,4}$$

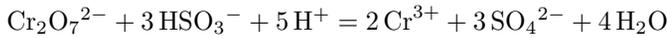
4 Écrivons tout d'abord les demi-équations électroniques des couples impliqués :



et



d'où le bilan, pour 6 électrons échangés au global,



La constante d'équilibre K° d'une réaction d'oxydoréduction est telle que

$$\log K^\circ = \frac{n}{0,06} (E_{\text{ox}}^\circ - E_{\text{red}}^\circ)$$

avec n le nombre d'électrons échangés, $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,06 \text{ V}$ (relation habituellement donnée dans les énoncés mais absente ici), E_{ox}° le potentiel standard du couple de l'oxydant et E_{red}° celui du réducteur. Pour la réaction précédente, cela donne

$$\log K_2^\circ = \frac{6}{0,06} [E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) - E^\circ(\text{SO}_4^{2-}/\text{HSO}_3^-)]$$

AN:

$$\log K_2^\circ = 100 \times (1,33 - 0,17) = 116$$

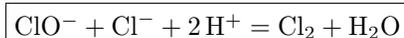
soit

$$\boxed{K_2^\circ = 10^{116}}$$

Comme $K_2^\circ \gg 1$, la réaction est **quantitative**.

5 Le potentiel standard du couple CNO^-/CN^- est égal à $-0,13 \text{ V}$ si bien que la droite (qui plus est décroissante) frontière entre les deux espèces est bien en dessous du domaine de ClO^- donné à la figure 2. Ainsi, le domaine de prédominance de CN^- (sous la droite frontière) est donc disjoint de celui de ClO^- : la réaction entre ces deux espèces est quantitative.

6 L'eau de Javel est une solution équimolaire de Cl^- et de ClO^- . En milieu acide, les ions hypochlorite ClO^- se protonent pour former l'acide hypochloreux HClO qui possède un domaine disjoint de celui des ions chlorure Cl^- si le pH devient trop faible. Les deux espèces réagissent entre elles selon une réaction de médiamutation pour former du dichlore Cl_2 , gaz très toxique, selon la réaction



CCINP Modélisation et Ingénierie numérique

PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jacques Ding (École Polytechnique); il a été relu par Valentin Raban (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Ce sujet traite de la modélisation et de la détection des tsunamis.

- Dans la partie I, on s'intéresse au séisme à l'origine du tsunami en étudiant un modèle simple de sismomètre. Celui-ci est composé d'un capteur électromagnétique de vitesse en mouvement dans un référentiel non galiléen. Cette partie mobilise les cours d'induction magnétique, de mécanique du point et de filtrage du signal. Aucune connaissance de mécanique en référentiel non galiléen n'est requise.
- La deuxième partie modélise la localisation de l'épicentre du séisme par trilatération. Composée de seulement six questions, elle fait uniquement appel à de la géométrie élémentaire. Elle évalue surtout le bon sens et la capacité de compréhension des candidats.
- La dernière partie propose d'analyser la propagation d'un tsunami. Principalement orientée vers la mécanique des fluides, elle demande d'établir l'équation de propagation du tsunami en mer et d'étudier sa résolution numérique.

Ce sujet est assez court et les questions de physique sont très proches du cours. Les deux premières parties sont abordables dès la première année (pourvu que la force de Laplace ait été traitée), tandis que la troisième partie, un peu plus technique, nécessite pleinement les connaissances de seconde année. Notons que tout le long du sujet, les résultats importants sont systématiquement donnés par l'énoncé, ce qui permet de ne pas rester bloqué. Remarquons également qu'aucune question ne fait appel spécifiquement aux sciences de l'ingénieur, et que seule la question 35 demande des connaissances en informatique.

En conclusion, ce sujet très abordable permet de vérifier sa capacité à mener les raisonnements classiques vus en classe.

INDICATIONS

Partie I

- 4 La puissance électromotrice s'écrit $\mathcal{P}_{\text{fem}} = e(t)i(t)$.
- 10 Utiliser la relation de Chasles pour exprimer $\overrightarrow{\text{OM}}$ en fonction notamment de Z_S et d_Z puis dériver deux fois par rapport au temps.
- 17 On peut prendre pour critère fréquentiel la bande passante à -6 dB.

Partie II

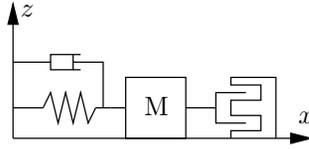
- 22 Montrer que le système de la question précédente est de rang 2 en exprimant une de ses lignes en fonction des deux autres.

Partie III

- 25 En proposant des ordres de grandeur, comparer l'accélération engendrée par un tsunami à celle des vagues usuelles.
- 29 Intégrer l'équation (1) de l'énoncé, projetée selon (Oz) , entre z et $h + \xi(x, t)$ correspondant à la surface eau-air.
- 30 Exprimer δm_e comme une variation de volume, puis comme un bilan de flux de matière. Réaliser l'approximation $\xi \ll h$.
- 31 Différencier les équations obtenues aux questions 28 et 30 pour éliminer le terme de vitesse, en utilisant le théorème de Schwarz.
- 33 Pour la première partie de la question, contrairement à ce qu'il est écrit, il faut lire les figures 12 et 13.
- 34 Exprimer le temps $d\tau_p$ nécessaire au tsunami pour parcourir une distance dx , puis intégrer.

I. LES SISMOMÈTRES

1 Un sismomètre horizontal peut être modélisé de la même manière qu'un sismomètre vertical, en supposant que la masse M glisse sur le sol sans frottement, comme le montre le schéma ci-dessous.



2 La force de Laplace infinitésimale $\delta \vec{F}_{\text{Lap}}$ s'exerçant sur un tronçon de longueur $d\ell$ parcouru par un courant i orienté dans le même sens et soumis à un champ magnétique B est

$$\delta \vec{F}_{\text{Lap}} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

3 D'après la figure 4 de l'énoncé, un tronçon élémentaire orienté de la bobine s'écrit $d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_\theta$, où \vec{u}_θ est le vecteur unitaire orthoradial des coordonnées cylindriques. Avec $\vec{B} = B \vec{u}_r$,

$$\delta \vec{F}_{\text{Lap}} = i d\ell \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r = -iB d\ell \vec{u}_z$$

En intégrant sur toute la longueur ℓ du bobinage, i et B étant constants

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = -iB\ell \vec{u}_z$$

4 La puissance mécanique développée par la force de Laplace s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}} = \vec{F}_{\text{Lap}} \cdot \vec{v}_b$$

La puissance électromotrice est donc

$$\mathcal{P}_{\text{fem}} = -\mathcal{P}_{\text{Lap}} = iB\ell v_b$$

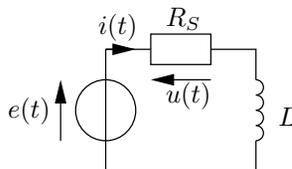
Cette identité signifie que **la conversion magnétomécanique de puissance est parfaite**. Or, \mathcal{P}_{fem} peut aussi s'écrire, pour une force électromotrice $e(t)$,

$$\mathcal{P}_{\text{fem}} = e(t)i(t)$$

D'où

$$e(t) = B\ell v_b(t)$$

5 On modélise la force électromotrice $e(t)$ par une source de tension idéale. Par ailleurs, l'énoncé indique que la bobine d'inductance L est branchée en série avec une résistance R_S . On en déduit le schéma électrique du montage,



6 La loi des mailles appliquée au circuit précédent donne

$$e(t) = u(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

La loi d'Ohm $i(t) = u(t)/R_S$ et le résultat de la question 4 conduisent à

$$\boxed{B\ell v_b(t) = u(t) + \frac{L}{R_S} \frac{du}{dt}(t)}$$

7 On souhaite avoir $u(t)$ proportionnelle à $v_b(t)$. Autrement dit, dans l'équation différentielle précédente, il faut que

$$\left| \frac{L}{R_S} \frac{du}{dt}(t) \right| \ll |u(t)|$$

En ordre de grandeur, $du/dt \sim u \times f$ où f est la fréquence du séisme. Ainsi, en simplifiant par $|u|$,

$$Lf \ll R_S$$

Prenons un facteur de comparaison égal à 100. Dans le pire des cas, $f = 100$ Hz selon le tableau 1, donc

$$\boxed{R_S \geq 100 \times Lf = 100 \times 0,1 \times 100 = 1 \text{ k}\Omega}$$

8 La condition précédente étant vérifiée, l'équation de la question 6 devient

$$B\ell v_b(t) = u(t) = R_S i(t)$$

D'où
$$i(t) = \frac{\ell B v_b(t)}{R_S}$$

D'après le résultat de la question 3,

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Lap}} = -\lambda_e v_b(t) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \lambda_e = \frac{(\ell B)^2}{R_S}}$$

Rappelons l'énoncé de la loi de Lenz : les conséquences (force électromotrice et force de Laplace) s'opposent aux causes qui les ont créées. Ici, la cause est le mouvement de la bobine dû à un séisme. L'expression précédente de la force de Laplace est de type frottement fluide, donc a tendance à **s'opposer au mouvement de la bobine. Ceci est en accord avec la loi de Lenz.**

9 Considérons le système constitué de la masse M dans le référentiel galiléen \mathcal{R} . Lorsque le sismomètre est au repos, les forces de Laplace et de l'amortisseur sont nulles. La masse n'est alors soumise qu'à son poids P et à la force de rappel du ressort F_r d'expressions

$$\vec{P} = -mg \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{F}_r = +k(L_0 - L_v) \vec{u}$$

Rappelons l'expression générale de la force de rappel d'un ressort de longueur instantanée $L(t)$ et de longueur à vide L_v :

$$\vec{F}_r = -k(L(t) - L_v) \vec{u}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire dirigé depuis le point d'accroche vers l'extrémité opposée du système considéré. Ici, comme le ressort est suspendu verticalement sur son extrémité supérieure, \vec{u} est descendant, c'est-à-dire $\vec{u} = -\vec{u}_z$. Par ailleurs, dans notre situation, comme $L_0 > L_v$, la force de rappel est dirigée vers le haut, ce qui est attendu.

Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Augustin Long (professeur en CPGE) et Nicolas-Alexandre Goy (professeur en CPGE); il a été relu par Julien Dumont (professeur en CPGE), Stéphane Ravier (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur plusieurs phénomènes prenant place dans l'atmosphère. Il est composé de deux parties indépendantes, l'une de chimie, la plus courte, l'autre de physique. La première partie étudie le dioxygène et l'ozone, deux constituants de l'atmosphère. Elle est découpée en trois sous-parties.

- La première présente l'élément oxygène, puis les deux molécules via des questions classiques sur la composition atomique et sur les structures de Lewis.
- Une étude thermodynamique et énergétique de la dissociation du dioxygène est ensuite abordée.
- Enfin, les questions ouvertes de la dernière partie permettent d'appréhender un modèle de la couche d'ozone afin d'étudier la variation de la concentration en fonction de l'altitude.

Cette partie est relativement simple, avec de très nombreuses applications directes du cours, et conclues par des résolutions numériques qu'il était possible d'effectuer avec la calculatrice. Les deux dernières questions sont ouvertes: bien que plus difficiles et un peu calculatoires, elles restent abordables en détaillant soigneusement les raisonnements et les calculs menés.

La seconde partie propose une modélisation linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz associée à la déformation des nuages. Elle comporte quatre sous-parties.

- La première traite la question de la pression dans l'atmosphère supposée isotherme, pour un gaz supposé parfait. Il s'agit ici de redémontrer un résultat du cours et d'estimer la variation de la pression dans la zone d'étude grâce à un exemple où l'on constate l'instabilité de Kelvin-Helmholtz.
- La deuxième est une résolution de problème utilisant les documents présents dans l'annexe B. Celle-ci s'axe sur la formation de nuages par orographie. Il est important de prendre le temps d'analyser ces documents.
- La troisième sous-partie modélise l'écoulement avant l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Il s'agit de discuter les conséquences d'un écoulement d'air chaud rapide se faisant au-dessus d'une couche d'air froid en écoulement elle aussi.
- Enfin, la dernière aborde l'instabilité de Kelvin-Helmholtz proprement dite et sa modélisation à partir d'une approche ondulatoire. On identifie la relation de dispersion associée et on s'intéresse particulièrement aux conditions de déclenchement et de croissance de cette instabilité.

Ce sujet de difficulté modérée utilise essentiellement la mécanique des fluides qu'il permet de travailler ou réviser efficacement. Il propose également une résolution de problème qui permet de réviser quelques notions de thermodynamique et de travailler la compréhension et l'utilisation d'un diagramme original. Plusieurs résultats intermédiaires sont donnés, ce qui permettait de ne pas rester bloqué.

INDICATIONS

Partie I

- 4 Écrire le système vérifié par les proportions des isotopes de l'oxygène.
- 9 Proposer un cycle thermodynamique mettant en jeu la dissociation des liaisons puis la formation des deux liaisons O–H de l'eau.
- 13 Quelle est l'influence de l'augmentation de la concentration de O_2 sur l'intensité des rayonnements UV lorsqu'on se rapproche de la surface ? Quelles sont les conséquences de cette évolution pour k_1 ?
- 14 Exprimer la constante k_1 à l'altitude z et à 50 km d'altitude afin d'établir une relation entre $k_1(z)$ et $k_1(50)$. En déduire alors l'expression de $n_{O_3}(z)$, puis étudier cette fonction pour déterminer la valeur de z pour laquelle elle est maximale et la valeur de ce maximum.

Partie II

- 17 Utiliser le résultat de la question précédente en exploitant l'altitude et la taille de l'image de la figure 2. Une règle de conversion « taille sur l'image - taille réelle » doit être exploitée.
- 18 Seuls le document B2 et les cinq premiers paragraphes du document B1 sont utiles pour cette question.
- 19 Il faut utiliser le document B3 en partant de l'altitude de la mer et en choisissant la bonne transformation adiabatique. La donnée de l'énoncé concernant le rapport de mélange r permet de définir l'état final de la transformation.
- 21 Il faut définir l'inégalité entre ρ_1 et ρ_2 , utiliser l'hypothèse de l'égalité des débits massiques et les relations établies à la question précédente.
- 22 Attention à faire un schéma clair et propre et à l'orientation de la force de friction visqueuse, notamment son signe.
- 25 Faire un schéma propre d'un tube de courant, considéré comme un système fermé Σ^* à l'instant t et le même tube à l'instant $t + dt$. L'intersection du tube entre ces deux instants correspond au système ouvert Σ . Se placer en régime stationnaire, effectuer un bilan d'énergie cinétique et utiliser le théorème de l'énergie cinétique avec pour seules forces le poids et les forces pressantes.
- 28 Identifier la cause, de manière générale, d'un gradient et de la continuité d'un champ de vitesse à une interface et exploiter le résultat de la question 23.
- 30 Utiliser le théorème de Bernoulli.
- 33 Résoudre l'équation différentielle avec les indications donnant une solution bornée. Attention au signe de l'altitude.
- 34 On obtient un système à deux inconnues A_1 et A_2 . Montrer qu'il existe une relation entre v_1 , v_2 et c de la forme $(v_1 - c)^2 + (v_2 - c)^2 = 0$ et résoudre cette équation en c comportant une partie réelle et une partie imaginaire.
- 35 Utiliser directement le résultat de la question 34 et la définition de la relation de dispersion rappelée dans l'énoncé.
- 37 Utiliser le résultat de la question 34 pour déterminer le sens de propagation.
- 39 Une instabilité correspond à un taux de croissance positif.
- 43 Identifier τ à σ^{-1} et injecter le résultat des questions 34 et 38. Utiliser la définition du nombre d'onde et mesurer comme à la question 17 la longueur d'onde de l'instabilité sur la figure 2.

I. ÉTUDE DE DEUX COMPOSANTS DE L'ATMOSPHÈRE : LE DIOXYGÈNE ET L'OZONE

1 D'après la règle de Klechkowski, le principe d'exclusion de Pauli et la règle de Hund, la configuration électronique de l'oxygène à l'état fondamental s'écrit

$$\boxed{\text{O} (Z = 8) : 1s^2 2s^2 2p^4}$$

Les électrons de valence sont ceux des sous-couches de plus grand nombre quantique principal, ici $n = 2$. Les 6 électrons de **valence** sont donc $2s^2 2p^4$, tandis que les 2 électrons de **cœur** sont $1s^2$.

2 D'après sa configuration électronique, l'oxygène est situé dans la **deuxième période** et la seizième colonne (4^e colonne du bloc p) de la classification périodique.

3 Deux isotopes sont deux noyaux qui ont le **même nombre de protons** (même numéro atomique) mais des **nombre de neutrons différents** (nombres de masse différents). Pour les 3 isotopes stables de l'oxygène, les compositions des noyaux sont

- pour l'oxygène 16 : **8 protons et 8 neutrons** ;
- pour l'oxygène 17 : **8 protons et 9 neutrons** ;
- pour l'oxygène 18 : **8 protons et 10 neutrons**.

Comme deux isotopes ont le même nombre de protons, ils ont le même nombre d'électrons, notamment la même configuration électronique et les mêmes électrons de valence. Or, comme les propriétés chimiques dépendent de ces électrons de valence, deux isotopes ont des **propriétés chimiques identiques**.

4 En notant, M_{16} , M_{17} et M_{18} les masses molaires respectives de l'oxygène 16, de l'oxygène 17 et de l'oxygène 18, ainsi que x_{16} , x_{17} et x_{18} leurs proportions isotopiques respectives, on a

$$\begin{cases} M(\text{O}) = x_{16} M_{16} + x_{17} M_{17} + x_{18} M_{18} \\ 1 = x_{16} + x_{17} + x_{18} \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} M(\text{O}) - x_{17} M_{17} = x_{16} M_{16} + x_{18} M_{18} \\ 1 - x_{17} - x_{18} = x_{16} \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} M(\text{O}) - x_{17} M_{17} = (1 - x_{17}) M_{16} + x_{18} (M_{18} - M_{16}) \\ 1 - x_{17} - x_{18} = x_{16} \end{cases}$$

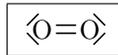
Finalement,
$$\boxed{\begin{cases} x_{18} = \frac{M(\text{O}) - M_{16} - x_{17} (M_{17} - M_{16})}{M_{18} - M_{16}} \\ x_{16} = 1 - x_{17} - x_{18} \end{cases}}$$

La résolution numérique de ce système donne

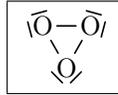
$$\boxed{\begin{cases} x_{18} = \frac{15,9994 - 15,99491 - 0,00037 \times (16,99914 - 15,99491)}{17,99916 - 15,99491} = 0,00205 \\ x_{16} = 1 - 0,00037 - 0,00205 = 0,99758 \end{cases}}$$

Il y a donc **0,205 %** d'oxygène 18 et **99,758 %** d'oxygène 16.

5 Le schéma de Lewis du dioxygène O_2 est

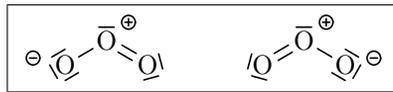


6 Si l'ozone O_3 était cyclique, sa structure de Lewis serait



et formerait ainsi, géométriquement, un triangle équilatéral. Aucune des liaisons O–O n'étant polaire, la molécule, telle que représentée, serait **apolaire**.

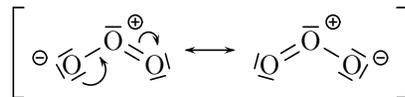
7 La molécule d'ozone O_3 est acyclique et sa structure de Lewis est



La présence d'un doublet non liant sur l'atome d'oxygène central tend à repousser les électrons engagés dans les liaisons covalentes avec les deux atomes d'oxygène aux extrémités. La molécule adopte donc une géométrie **coudée**.

Cette structure et cette géométrie rendent bien compte des propriétés de l'ozone proposées par l'énoncé : existence de charges partielles positives et négatives sur les atomes d'oxygène, et présence d'un moment dipolaire non nul d'après la géométrie coudée de la molécule.

Ces deux formes sont équivalentes et on peut passer de l'une à l'autre en délocalisant les électrons d'un atome d'oxygène vers l'autre.



8 D'après la définition de l'enthalpie standard de dissociation, on a

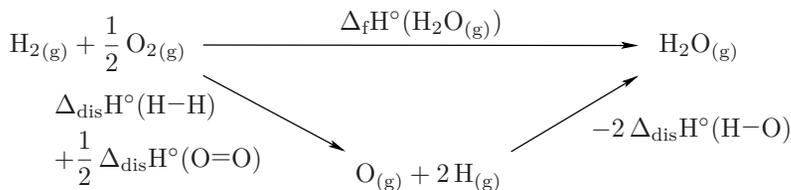
$$\Delta_r H_1^\circ = \frac{1}{2} [\Delta_{\text{dis}} H^\circ(A-A) + \Delta_{\text{dis}} H^\circ(B-B)]$$

Par ailleurs, avec le cycle thermodynamique proposé, la relation entre les enthalpies de réaction pour les transformations proposées s'écrit

$$\Delta_r H_2^\circ = \Delta_r H_1^\circ - \Delta_{\text{dis}} H^\circ(A-B) = \Delta_r H_1^\circ - E_{\text{liaison}}$$

d'où $E_{\text{liaison}} = \Delta_r H_1^\circ - \Delta_r H_2^\circ = \frac{1}{2} [\Delta_{\text{dis}} H^\circ(A-A) + \Delta_{\text{dis}} H^\circ(B-B)] - \Delta_r H_2^\circ$

9 En s'inspirant de la question précédente, on peut décomposer la réaction de formation de $H_2O_{(g)}$ selon le cycle



Centrale Physique et Chimie 2 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Louis Salkin (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à l'exploration des très grandes profondeurs, illustrée par l'expédition *Deepsea Challenger* dont le sous-marin a exploré la fosse des Mariannes. Il est composé de quatre parties indépendantes.

- La première partie aborde l'évolution de la pression avec la profondeur. On établit tout d'abord l'expression du champ de pression pour un fluide supposé incompressible, puis compressible. On compare alors le modèle à la pression mesurée au fond de la fosse des Mariannes. Pour terminer cette partie, on propose d'évaluer la masse de ballast du sous-marin dans le cadre d'une résolution de problème. Cette partie utilise des notions de statique des fluides et de mécanique.
- La deuxième partie se penche sur le risque d'hypoxie, qui serait provoquée par une panne du système de maintien de la composition de l'air au sein de l'habitacle du sous-marin. À l'aide d'outils thermodynamiques et de données physiologiques moyennes, on cherche à estimer la durée de vie du pilote dans le sous-marin.
- La troisième partie, consacrée à la chimie, présente un système de libération du ballast dont le principe repose sur la corrosion spontanée d'un alliage de magnésium au contact de l'eau. L'objectif est de déterminer la durée totale de corrosion à partir de la géométrie du système et de courbes courant-potentiel.
- La quatrième partie est de loin la plus longue et s'intéresse à la communication entre le sous-marin et un bateau situé en surface. Dans un premier temps, on propose l'utilisation d'ondes électromagnétiques radio. Suite à un raisonnement analogue à l'effet de peau dans un conducteur métallique, on montre que les ordres de grandeur rendent inenvisageables une communication par ce type d'ondes. Dans un second temps, on considère l'utilisation d'ondes acoustiques. Après avoir établi l'équation de propagation de ces ondes, on décrit, par analogie avec l'optique géométrique, la déviation des rayons acoustiques induite par la modification de la célérité des ondes avec la profondeur. On en déduit les conditions d'émission optimales.

Ce sujet est intéressant et explore des chapitres variés du programme. De nombreux résultats intermédiaires sont donnés et permettaient ainsi de progresser dans le sujet sans rester bloqué à une question calculatoire. Comme souvent dans cette banque de concours, certaines résolutions de problème permettent de faire preuve d'initiative et de faire apprécier son recul en physique-chimie.

INDICATIONS**Partie I**

4 Exprimer la dérivée $\frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{dP} \frac{dP}{dz}$

puis injecter le résultat de la question 3 et la relation locale de la statique des fluides dans celle-ci.

- 7 Décomposer le raisonnement en deux phases : la phase de descente et celle de remontée. Préciser le système étudié dans chacune des phases, et faire l'inventaire des forces. En supposant la vitesse constante dans chaque phase, il en résulte que la somme des forces s'annule. Isoler alors la masse de ballast en soustrayant les deux équations obtenues.

Partie II

- 9 Appliquer l'équation des gaz parfaits au dioxygène présent dans l'habitacle et dans les poumons du pilote.
- 10 Approximer le volume habitable V à celui d'une boule de diamètre D .

Partie III

- 14 Exprimer l'égalité des courants d'oxydation et de réduction en valeur absolue, en supposant les surfaces mises en jeu constantes pour simplifier. Avec les valeurs géométriques lues sur la figure 3, en déduire la valeur du rapport des courants surfaciques d'oxydation et de réduction. Déduire alors des courbes courant-potentiel la valeur de j_{AZ31} , puis la relier à la durée de corrosion de l'alliage.

Partie IV

- 18 Comparer les durées τ et $1/f$ et interpréter.
- 22 Déterminer l'expression réelle du champ électrique, puis le champ magnétique via l'équation locale de Maxwell-Faraday. En déduire le vecteur de Poynting.
- 32 La condition de l'énoncé revient à écrire l'égalité des composantes tangentielles des trois vecteurs d'onde.
- 37 Utiliser la relation trigonométrique

$$\sin \theta(z) = \tan \theta(z) \sqrt{1 - \sin^2 \theta(z)}$$

- 41 Faire apparaître la quantité dc/dz dans l'expression du rayon de courbure. Celui-ci est constant dans le cas où $c(z)$ est une fonction affine de z .

I. PRESSION ET PLONGÉE

1 La relation $\rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$ traduit l'**équilibre mécanique du fluide** dans le référentiel d'étude. Les termes $\rho \vec{g}$ et $-\overrightarrow{\text{grad}} P$ correspondent respectivement aux équivalents volumiques du **poids** et des **forces de pression** exercés sur le fluide.

2 La projection de l'équation précédente selon l'axe Oz descendant s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = \rho g$$

La masse volumique étant supposée homogène et notée ρ_0 , l'intégration de cette relation conduit à

$$P(z) = \rho_0 g z + C^{\text{te}}$$

où la constante est fixée par la continuité de la pression en $z = 0$: $P(0) = P_0$. Il vient

$$P(z) = P_0 + \rho_0 g z$$

3 On considère une masse fixée m de liquide, de volume $V = m/\rho$. Une variation de pression entraîne une variation de son volume et donc de sa masse volumique. Le coefficient de compressibilité isotherme s'écrit

$$\chi_T = -\frac{1}{m/\rho} \left(\frac{\partial(m/\rho)}{\partial P} \right)_T = -\rho \left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial P} \right)_T$$

Par dérivation composée, $\left(\frac{\partial(1/\rho)}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$

Ainsi,

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$$

La masse volumique décroissant quand le volume augmente, le changement de signe dans l'expression de χ_T était attendu.

4 L'océan étant supposé isotherme, exprimons la dérivée $d\rho/dz$:

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{dP} \frac{dP}{dz} = \rho \chi_T \frac{dP}{dz}$$

En utilisant la relation locale de la statique des fluides,

$$\frac{d\rho}{dz} = \rho \chi_T \times \rho g = \rho^2 \chi_T g$$

Par séparation des variables, $\frac{d\rho}{\rho^2} = \chi_T g dz$

Intégrons cette relation entre les profondeurs $z = 0$ pour laquelle $\rho = \rho_0$, et z pour laquelle $\rho = \rho(z)$:

$$-\frac{1}{\rho(z)} + \frac{1}{\rho_0} = \chi_T g z$$

Finalement,

$$\rho(z) = \left(\frac{1}{\rho_0} - \chi_T g z \right)^{-1} = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 \chi_T g z}$$

5 La relation locale de la statique des fluides se réécrit

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\rho_0 g}{1 - \rho_0 \chi_{TG} z}$$

En séparant à nouveau les variables,

$$dP = \frac{\rho_0 g}{1 - \rho_0 \chi_{TG} z} dz$$

puis en intégrant entre $z = 0$ ($P = P_0$) et z ($P = P(z)$),

$$P(z) - P_0 = \rho_0 g \left[-\frac{1}{\rho_0 \chi_{TG}} \ln(1 - \rho_0 \chi_{TG} z) \right]_0^z$$

soit

$$P(z) = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \rho_0 \chi_{TG} z)$$

Aux faibles profondeurs ($\rho_0 \chi_{TG} z \ll 1$), un développement limité permet de retrouver le profil de pression dans un fluide incompressible

$$P(z) \simeq P_0 + \rho_0 g z$$

6 Calculons numériquement la pression en $z = z_{\max}$:

$$\text{AN: } P(z_{\max}) = 10^5 - \frac{\ln(1 - 1,02 \cdot 10^3 \times 4,41 \cdot 10^{-10} \times 9,81 \times 10,9 \cdot 10^3)}{4,41 \cdot 10^{-10}}$$

$$P(z_{\max}) = 1,12 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

La valeur est très proche de la valeur mesurée ($1,13 \cdot 10^8$ Pa) : **ce modèle est donc satisfaisant**. On pourrait toutefois l'affiner en tenant compte de l'évolution de la température et de la salinité avec la profondeur.

7 On assimile le sous-marin à un cylindre de hauteur H_{DC} et de diamètre D_{DC} . Numériquement,

$$\frac{H_{DC}}{D_{DC}} = \frac{7,30}{2,11} = 3,5$$

Au cours des phases de descente et de remontée, le sous-marin se situe dans le cas c de la figure 2. On en déduit le coefficient de traînée $C_x \simeq 0,87$. On note m la masse du sous-marin (ballast exclu), m_b la masse de ballast. Pour simplifier, on suppose le volume du ballast négligeable devant le volume total du sous-marin, noté V . On décompose l'étude en deux phases.

- Phase de descente: on isole le système {sous-marin+ballast}, soumis à trois forces: son poids, la poussée d'Archimède et la force de traînée dirigée vers le haut. Cette phase se déroulant à vitesse v_1 supposée constante, la somme des forces s'annule. En projection selon un axe Oz descendant,

$$(m + m_b)g = \rho V g + \frac{1}{2} C_x \rho S v_1^2$$

- Phase de remontée: on isole le sous-marin, soumis à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force de traînée, à présent dirigée vers le bas. Cette phase se déroulant à vitesse v_2 encore supposée constante, la somme des forces s'annule. En projection selon Oz ,

$$mg + \frac{1}{2} C_x \rho S v_2^2 = \rho V g$$

Mines Physique 1 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jimmy Roussel (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Ce problème aborde trois thématiques distinctes dans lesquelles les travaux d'analyse de Fourier ont des applications.

- Dans la première partie, on s'intéresse à l'échantillonnage d'un signal électronique. Le but est de démontrer, par une approche graphique qui met en jeu les spectres de Fourier des signaux à échantillonner et échantillonné, le critère de Shannon-Nyquist qui permet de dimensionner correctement le processus d'échantillonnage dans la numérisation d'un signal. Les questions sont sans difficulté même s'il n'est pas toujours facile de comprendre ce qui est attendu dans certaines questions.
- La partie II aborde la transmission du son à travers une paroi, modélisant une cloison entre deux appartements contigus par exemple. Après avoir établi l'équation de propagation de la surpression acoustique, on adopte le formalisme des ondes planes progressives harmoniques en notation complexe. C'est l'occasion de redémontrer et d'utiliser la notion d'impédance acoustique.
- Dans la dernière partie, on étudie la diffusion thermique unidimensionnelle en géométrie cylindrique. On établit l'équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution de la température dans un tore, d'abord en présence d'échanges conducto-convectifs avec l'air, puis en supposant le tore isolé de l'extérieur. On cherche une solution de ce problème sous forme d'une fonction développée en série de fonctions trigonométriques. Historiquement, c'est lors de l'étude d'un dispositif analogue à celui proposé ici que Fourier a introduit les séries qui portent aujourd'hui son nom.

Les trois parties sont de taille comparable et sont indépendantes les unes des autres. Le sujet n'est pas très long et ne présente pas de difficulté majeure. Il n'y a notamment que peu de questions calculatoires et très peu d'applications numériques. C'est cependant un sujet relativement original, pour ses parties II et III, qui aborde des parties différentes du programme de deuxième année.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Linéariser l'expression de $x_e(t)$.
- 2 Exprimer $2\pi f_0 t_k$ en fonction de k pour déterminer rapidement $x_e(t_k)$. Pour que le signal échantillonné puisse être représentatif, il faut qu'il soit de période $1/f_0$.
- 3 L'énoncé ne donnant pas d'expression pour les coefficients a_k , ne pas s'intéresser aux amplitudes des composantes spectrales mais uniquement à leurs fréquences.
- 4 Pour que le spectre du signal échantillonné soit représentatif du signal $x(t)$, la fréquence $f_e - f_0$ doit être plus grande que la fréquence f_0 .
- 7 Être méthodique pour cette question : déterminer successivement la durée en secondes, le nombre d'échantillons nécessaires, et multiplier par la taille occupée par un échantillon. Ne pas oublier que l'enregistrement est stéréo, ce qui implique deux signaux audio distincts. On rappelle que $1 \text{ Mo} = 10^6 \text{ o}$.

Partie II

- 10 Les deux équations recherchées sont le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule fluide et l'équation locale de conservation de la masse.
- 11 Pour démontrer l'expression de Z_a , utiliser une des deux équations aux dérivées partielles introduites dans la question précédente, puis injecter l'expression proposée pour $p_i(x, t)$. Pour introduire c_s , retrouver au préalable la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert.
- 13 Outre les amplitudes des pressions incidente et transmise, le théorème de la résultante cinétique fait intervenir l'amplitude de la pression réfléchie, ainsi que \underline{X} et ses dérivées. Il reste à exprimer ces termes en fonction des pressions incidente et transmise seulement. À partir de la relation sur les vitesses de la question précédente, déduire une relation sur les pressions en utilisant l'impédance acoustique. Pour les termes en \underline{X} , remarquer que $v_t(0, t) = j\omega \underline{X}(t)$.
- 14 Le terme élastique est le terme proportionnel à K . Il peut éventuellement être négligé devant le terme inertiel, proportionnel à m . Montrer que cela revient à se placer dans le cas $\omega \gg \omega_0$. Pour avoir une atténuation de 40 dB, il faut choisir la pulsation de coupure à deux décades sous la pulsation choisie.

Partie III

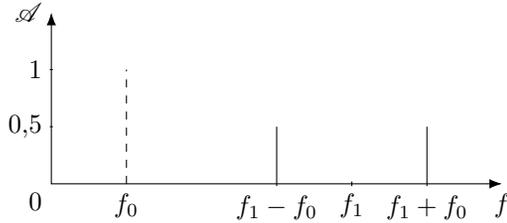
- 15 Pour obtenir τ , raisonner en échelles avec l'équation de la diffusion.
- 16 On est en géométrie cylindrique à r fixé : en effet, puisque $a \ll R$, on a $r = R$.
- 17 Pour établir l'équation vérifiée par la température, appliquer le premier principe au volume élémentaire. Ne pas oublier les échanges conducto-convectifs avec l'air.
- 18 Pour déterminer la dimension de δ , comparer les expressions des flux thermiques conductif et conducto-convectif pour obtenir la dimension de λ/h .
- 19 Pour obtenir les expressions des constantes, exploiter la température, connue, en $\theta = 0$ et traduire l'annulation de $j_{\text{th}}(\pi)$.
- 20 Sur quelle distance caractéristique doit s'effectuer la diffusion pour que tout le tore soit concerné ?
- 21 Après avoir injecté l'expression de $T_n(\theta, t)$, séparer les variables en isolant dans un membre f_n et ses dérivées et dans l'autre g_n et ses dérivées. Ces membres sont constants. Déterminer d'abord g_n puis f_n . f_n est paire par hypothèse.

I. ANALYSE DE FOURIER ET ÉCHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL ÉLECTRONIQUE

1 Linéarisons l'expression de $x_e(t)$:

$$x_e(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_1 t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_1 + f_0)t) + \cos(2\pi(f_1 - f_0)t)]$$

On en déduit que le spectre du signal $x_e(t)$ est composé de deux pics aux fréquences respectives $(f_1 + f_0)$ et $(f_1 - f_0)$. Sur le graphique ci-dessous, le spectre de $x(t)$ est en pointillés et celui de $x_e(t)$ est en traits pleins.



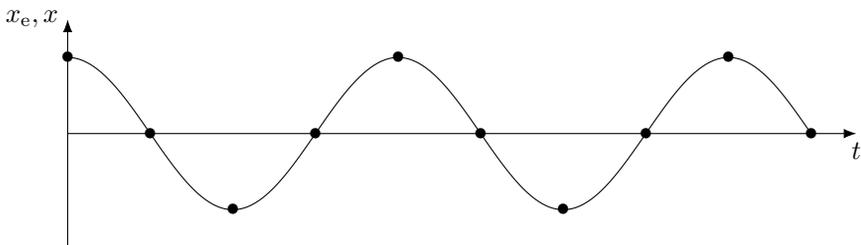
Le spectre proposé est un spectre en amplitude. Le calcul complet de la transformée de Fourier d'un signal peut en effet donner davantage d'informations que la seule amplitude, notamment la phase.

2 Déterminons $x(t_k)$ en exprimant $2\pi f_0 t_k$ pour les différentes valeurs de f_e :

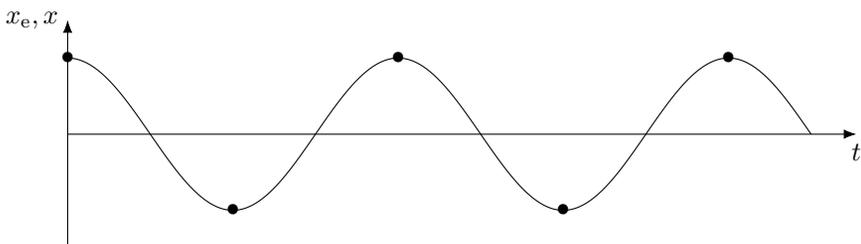
f_e	$4 f_0$	$2 f_0$	$\frac{4}{3} f_0$
$2\pi f_0 t_k$	$\frac{k}{2} \pi$	$k \pi$	$\frac{3k}{2} \pi$

Sur le graphique, on place le signal non échantillonné $x(t)$ en trait continu et on indique les points échantillonnés pour chaque fréquence d'échantillonnage :

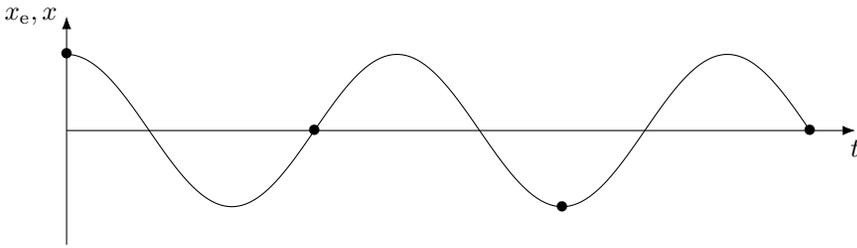
- pour $f_e = 4 f_0$



- pour $f_e = 2 f_0$



- pour $f_e = 4f_0/3$



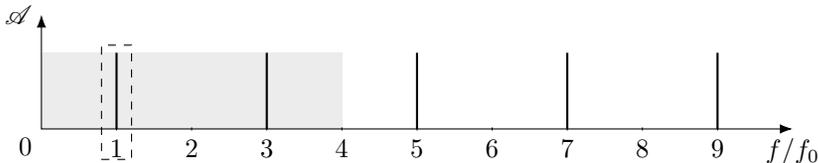
On constate sur ce graphique que l'on ne retrouve pas la fréquence f_0 sur le signal échantillonné à la fréquence $4f_0/3$: en effet, alors que l'on a tracé un peu plus de 2 périodes, ce signal échantillonné ne présente aucune période complète. **La fréquence d'échantillonnage $4f_0/3$ ne permet pas d'obtenir un signal échantillonné représentatif du signal analogique de départ.**

Avec une fréquence d'échantillonnage de $2f_0$, même si la fréquence est correctement restituée, le signal temporel construit en reliant les points échantillonnés donne un triangle, assez éloigné d'une sinusoïde. Même si la représentation temporelle n'est pas encore parfaite pour $f_e = 4f_0$, on comprend qualitativement que la solution est de plus en plus proche à mesure que la fréquence d'échantillonnage augmente.

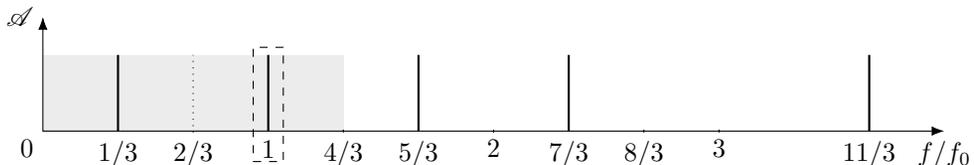
3 Notons $p_k(t) = \cos(2\pi k f_e t)$. On peut alors exprimer $x_e(t)$ sous la forme

$$x_e(t) = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x(t) p_k(t)$$

Cette écriture fait apparaître une combinaison linéaire de termes analogues à ceux étudiés dans la question 1. Chacun fait donc apparaître deux composantes spectrales, à $k f_e + f_0$ et $k f_e - f_0$. Ne disposant pas des valeurs des coefficients a_k , on ne peut représenter que le contenu fréquentiel du spectre. On choisit, arbitrairement, de normaliser toutes les amplitudes à 1. On encadre en pointillés le spectre du signal original et on matérialise la fenêtre $[0; f_e]$. Voici le spectre pour $f_e = 4f_0$



et pour $f_e = 4f_0/3$



On peut être surpris de la présence d'un « trou » dans le spectre précédent entre $7f_0/3$ et $11f_0/3$. En pratique, il n'y a pas de trou et les raies sont bien régulièrement espacées. La raie « manquante » est en effet celle à $3f_0$: l'énoncé impose de se limiter à $k \leq 2$ alors que cette raie provient de $k = 3$.

Mines Physique 2 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jimmy Roussel (professeur agrégé en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Stéphane Ravier (professeur en CPGE) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Que ce soit en laboratoire ou dans l'industrie, la mesure et le contrôle de grandeurs physiques passe le plus souvent par l'utilisation d'un capteur qui convertit la grandeur physique recherchée en une grandeur électrique. Le capteur de déplacement est couramment utilisé, notamment parce que de nombreuses grandeurs physiques (force, pression, accélération,...) peuvent être reliées à un déplacement. Le problème de cette épreuve porte sur l'étude d'un capteur de position particulier, dit LVDT, constitué d'un circuit primaire alimenté et couplé à deux circuits secondaires via un noyau ferromagnétique mobile. Le sujet est divisé en quatre parties indépendantes.

- Dans la partie I, on analyse les propriétés électromagnétiques du capteur dans son état de référence, c'est-à-dire lorsque le déplacement du noyau est nul. La structure du champ magnétique est étudiée et modélisée afin de calculer les inductances mutuelles entre circuits primaire et secondaires.
- La deuxième partie s'intéresse aux modifications que produit le déplacement du noyau. On montre notamment que la tension différentielle présente une amplitude reliée à ce déplacement.
- Le conditionnement du signal qui alimente le circuit primaire fait l'objet de la troisième partie. Un oscillateur à base d'ALI permet de générer un signal triangulaire d'amplitude et de fréquence ajustables. La conversion en un signal sinusoïdal est réalisée à l'aide d'un conformateur à diodes.
- Enfin, la dernière partie aborde un exemple d'application : l'accéléromètre.

Avec des questions sur l'électromagnétisme, l'électronique et la mécanique, le problème couvre le programme des deux années. L'énoncé comporte beaucoup d'informations ; il fallait donc identifier rapidement les informations pertinentes pour traiter les questions. Dans l'ensemble, cette épreuve, bien qu'assez longue, est progressive et bien guidée.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Dans l'approximation des régimes quasi permanents, le courant de déplacement est à négliger.
- 6 Comment se transforme \vec{B} par rapport au plan orthogonal à \vec{u}_z passant par O ?
- 8 Appliquer le théorème d'Ampère en choisissant un contour rectangulaire situé à cheval entre l'intérieur et l'extérieur du noyau ferromagnétique.
- 11 L'inductance mutuelle est définie par $\phi_k = M_k i_p$ où ϕ_k est le flux magnétique reçu par le secondaire k de la part du circuit primaire.

Partie III

- 20 L'ALI (A_3) fonctionne en régime saturé ; il faut donc distinguer les deux cas : les saturations haute et basse.
- 21 Remarquer que $v_e = v_s = \pm V_{\text{sat}}$.
- 24 Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que les deux diodes ne peuvent conduire simultanément le courant.
- 28 Noter qu'aucune diode ne laisse passer le courant.
- 29 On peut remplacer une diode passante par une source idéale de f.c.é.m. U_s .

Partie IV

- 33 L'énergie magnétique du noyau varie-t-elle lors d'un déplacement z ?
- 34 Appliquer le principe fondamental de la dynamique ou le théorème de la puissance cinétique en négligeant l'épaisseur de la masse sismique. Attention, le mouvement a lieu suivant un axe orthogonal à la pesanteur.
- 36 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle doit admettre des solutions réelles.
- 37 Supposer que l'accélération γ_1 est constante au moins durant le temps de réponse de l'accéléromètre.

ÉTUDE PHYSIQUE D'UN CAPTEUR DE POSITION

I. ÉTUDE DE L'ÉTAT DE RÉFÉRENCE

1 Dans l'ARQP, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}}$$

relation dans laquelle \vec{j} désigne la densité volumique de courant associée aux porteurs de charge libres. Il en découle la formulation générale du théorème d'Ampère :

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enlacé}}}$$

où $I_{\text{enlacé}}$ désigne l'intensité algébrique des courants libres enlacés par le contour C.

2 L'équation locale de Maxwell-Thomson est

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

Elle traduit la conservation du flux magnétique le long d'un tube de champ, puisque

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, d\tau = 0}$$

L'équation de Maxwell-Thomson est une relation qui décrit une propriété fondamentale du champ magnétique et qui dépasse le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents.

3 Le champ magnétique présente la propriété de symétrie suivante : en tout point d'un plan de symétrie d'une distribution de courant, le champ magnétique créé par ces courants est orthogonal à ce plan. Dans la situation qui nous intéresse, le plan orthogonal à \vec{u}_z et passant par O est un plan de symétrie de la distribution de courant. Par conséquent,

$$\boxed{\vec{B}(r, \theta, z = 0) = B_z(r, \theta, z = 0) \vec{u}_z}$$

4 La distribution de courant présente une symétrie de révolution d'axe Oz ce qui rend invariante les composantes du champ magnétique vis-à-vis de la coordonnée θ :

$$\vec{B} = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

avec $B_r(r, 0) = B_\theta(r, 0) = 0$ d'après la question précédente. Par ailleurs, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, c'est-à-dire de symétrie du champ magnétique. Ce dernier n'a donc pas de composante suivant \vec{u}_θ :

$$\vec{B} = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

Enfin, l'axe Oz est l'intersection d'une infinité de plans de symétrie du champ, ce qui impose à \vec{B} d'être selon cet axe pour les points y appartenant. Pour résumer,

$$\boxed{\vec{B} = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_r(r, 0) = 0 \\ B_r(0, z) = 0 \end{cases}}$$

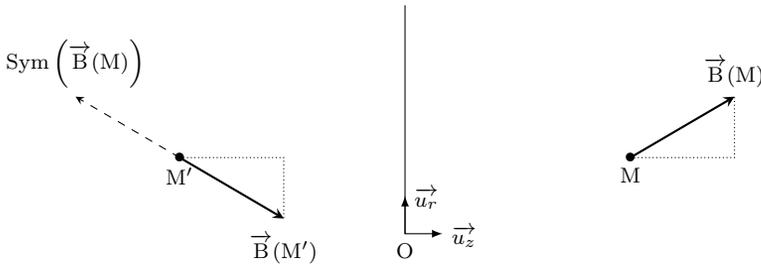
5 On vérifie sur la simulation fournie que :

- les lignes de champ coupent le plan $z = 0$ perpendiculairement, comme prévu à la question 3 ;
- les lignes de champ sont dans le plan de coupe contenant l'axe Oz ;
- l'axe Oz est une ligne de champ.

Le résultat de la simulation est bien en accord avec les questions 3 et 4.

6 Nous avons déjà vu que le plan orthogonal à \vec{u}_z et passant par O est un plan de symétrie de la distribution de courant. Du fait du caractère axial du champ magnétique, il en découle que ce plan est un plan d'antisymétrie vis-à-vis de \vec{B} . En d'autres termes, si l'on note M' le symétrique de M , on a

$$\vec{B}(M') = -\text{Sym}(\vec{B}(M))$$

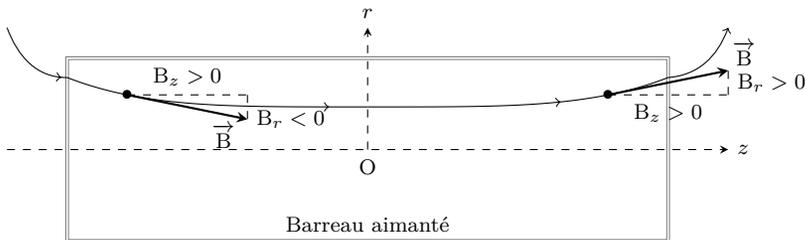


On voit immédiatement sur la figure ci-dessus que

$$B_z(r, -z) = B_z(r, z) \quad \text{et} \quad B_r(r, -z) = -B_r(r, z)$$

B_z est une fonction paire et B_r une fonction impaire de z , ce que confirme la figure 4.

7 Le circuit primaire étant alimenté par un courant d'intensité algébrique $i_p > 0$, il crée un « flux magnétique algébrique orienté selon \vec{u}_z ». Par conséquent, les lignes de champ magnétique dans le noyau sont orientées suivant $+\vec{u}_z$.



Le tracé d'une ligne de champ dans le barreau montre que l'on a

$$\begin{cases} B_z > 0 \\ B_r > 0 \end{cases} \quad \text{quand } z > 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_z > 0 \\ B_r < 0 \end{cases} \quad \text{quand } z < 0$$

Mines Chimie PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Augustin Long (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet a pour thème « chimie et énergie ». Ses trois parties sont indépendantes ; toutes sont très proches du cours.

- La première partie, la plus longue, concerne la filière hydrogène. Dans un premier temps, on s'intéresse à la production de dihydrogène par hydrolyse du tétrahydroborate de sodium. C'est l'occasion de répondre à quatre questions variées et très courtes. Dans la seconde sous-partie, ayant pour thème la cristallographie, on aborde le stockage du dihydrogène dans un alliage. Les questions y sont très classiques : on représente la structure, on calcule le paramètre de maille, on évoque le contact entre les atomes.
- La deuxième partie est une étude des piles zinc-air. On y aborde la nature des électrodes et leur polarité, les caractéristiques thermodynamiques de la réaction de fonctionnement ainsi que les questions habituelles sur la durée du fonctionnement de la pile, sa capacité, et sa force électromotrice.
- La dernière partie, qui comporte peu de questions, a pour but de doser le glucose présent dans le jus d'une orange. Un diagramme potentiel-pH de l'iode est fourni et il convient, comme très souvent, d'attribuer les domaines. Le dosage est ensuite décrit et il faut utiliser les données expérimentales pour déterminer la teneur en glucose. Il s'agit d'un dosage en retour dans lequel on titre du diiode par des ions thiosulfate, réaction souvent rencontrée et qu'il convient de maîtriser. La dernière question, celle qui concerne spécifiquement le dosage, nécessite une bonne compréhension des réactions qui se déroulent et il faut écrire méthodiquement et patiemment les relations entre les différentes quantités de matière.

Cette épreuve, qui dure 1h30 seulement, est un exercice spécifique auquel il faut se préparer. Le sujet de cette année constitue pour cela un très bon entraînement. Les questions sont simples, classiques et courtes (à l'exception de la dernière). Il fallait répondre avec efficacité pour espérer terminer l'épreuve dans le temps imparti.

INDICATIONS

Partie I

- 1 On rappelle que $\ell = 0$ pour une sous-couche s, que $\ell = 1$ pour une sous-couche p et que m_ℓ est compris entre $-\ell$ et $+\ell$.
- 2 L'atome de bore est central. Comparer avec le carbone pour déduire la géométrie de la molécule.
- 3 Le volume molaire d'un gaz dans ces conditions est donné en annexe.
- 4 Un catalyseur intervient-il dans le bilan ?
- 7 Comparer les distances du site B vers les atomes de fer d'une part, et les atomes de titane d'autre part. Est-ce qu'un atome d'hydrogène a la place de s'insérer dans la plus petite des deux distances précédentes ?
- 9 Attention, il faut 2 atomes H pour une molécule H_2 .

Partie II

- 10 On réalise l'oxydation du zinc par le dioxygène. Les électrodes de cette pile sont constituées par les armatures A_1 et A_2 . Déterminer où ont lieu l'oxydation et la réduction.
- 13 Il faut utiliser la relation de cours $\Delta_r G^\circ = -n\mathcal{F}e^\circ$.
- 14 Quel est le réactif limitant ? Déterminer la charge totale qui peut circuler.

Partie III

- 18 Déterminer le couple impliqué et écrire la relation de Nernst. L'énoncé ne donne pas la valeur $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,06 \text{ V}$.
- 20 On réalise un dosage en retour. Il faut bien distinguer toutes les quantités de matière utiles : notamment pour le diiode, $n(I_2)_0$ initialement introduit, et $n(I_2)_{\text{titré}}$ la quantité titrée par le thiosulfate ; pour les ions iodate, $n(IO_3^-)_0$ la quantité initiale produite, $n(IO_3^-)_{\text{réagit}}$ la quantité qui réagit avec le glucose, et $n(IO_3^-)_{\text{restant}}$ la quantité qui reste après réaction et qui permet de reformer du diiode. Enfin, ne pas oublier que le jus a été dilué 5 fois.

CHIMIE ET ÉNERGIE

1 D'après les règles de Klechkowski, Hund et Pauli, la configuration électronique du bore est

$$\text{B}(Z = 5) : 1s^2 2s^2 2p^1$$

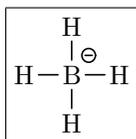
Les électrons de valence sont ceux de la **couche 2 (2s²2p¹)**. Pour les électrons de la sous-couche 2s, on a $n = 2$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$ et $m_s = \pm 1/2$, un quadruplet possible est alors

$$(2, 0, 0, +1/2)$$

Pour les électrons de la sous-couche 2p, on a $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = -1; 0; +1$ et $m_s = \pm 1/2$, un quadruplet possible est alors

$$(2, 1, 0, +1/2)$$

2 La structure de Lewis de BH_4^- est



Par analogie avec la géométrie du carbone qui présente également quatre liaisons, comme le bore ici, on déduit que la géométrie est **tétraédrique**.

3 D'après l'équation de réaction donnée, on forme 4 équivalents de dihydrogène par équivalent d'ions BH_4^- . Le volume dégagé est donc

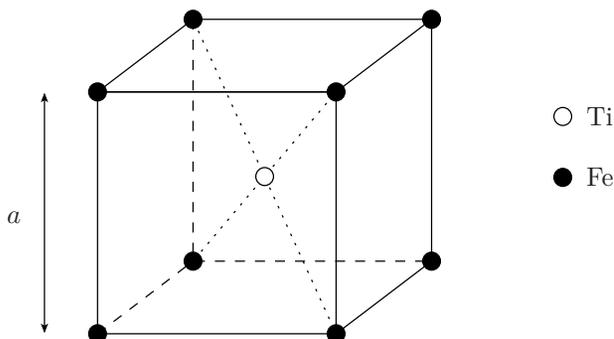
$$V(\text{H}_2) = n(\text{H}_2) V_m = 4 (CV) V_m$$

AN:

$$V(\text{H}_2) = 4 \times 1 \times 1 \times 24 = 96 \text{ L}$$

4 Un catalyseur accélère la réaction sans intervenir dans son bilan. Le volume de dihydrogène dégagé est donc **identique** en présence de catalyseur.

5 La maille de l'alliage fer-titane est la suivante :



6 Le contact fer-titane a lieu sur la demi-diagonale du cube :

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = R(\text{Fe}) + R(\text{Ti})$$

AN:

$$a = \frac{2}{1,8} \times (125 + 145) \approx 1,1 \times 270 \approx 300 \text{ pm}$$

7 Les sites de type B (au centre de chaque face) sont situés à la distance $a/2$ des atomes de titane et à la distance $a\sqrt{2}/2$ des atomes de fer. Ces distances n'étant pas égales, **les sites octaédriques de type B ne sont pas réguliers.**

La plus petite distance entre un site de type B et un atome voisin est la distance $a/2$ avec les atomes de titane. Pour savoir si le site est déformé, regardons si un atome d'hydrogène a la place de s'insérer :

$$R(\text{H}) + R(\text{Ti}) = 35 + 145 = 180 \text{ pm} > \frac{a}{2} = 150 \text{ pm}$$

Il n'y a donc pas la place d'insérer un atome d'hydrogène dans le site sans déformation : **les sites octaédriques de type B sont déformés par l'introduction d'hydrogène.**

Pour étudier la déformation du site, il n'est pas nécessaire de regarder les deux distances vers les sommets, seule la plus petite distance est pertinente, ici vers les atomes de titane à la distance $a/2$.

8 Comptons les différents atomes dans la maille :

$$Z(\text{Fe}) = 8 \times \frac{1}{8} = 1 \quad Z(\text{Ti}) = 1 \times 1 = 1 \quad Z(\text{H}) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

La formule de l'alliage est alors



9 Il y a 3 atomes d'hydrogène, donc 1,5 molécules H_2 , dans une maille de l'alliage de volume $V = a^3$. Le volume molaire correspondant est alors

$$V'_m = \frac{\mathcal{N}_A}{1,5} a^3$$

AN:

$$V'_m = \frac{6.10^{23}}{1,5} \times 3^3 \times 10^{-30} = 4 \times 27 \times 10^{-7} \approx 1,1.10^{-5} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$$

Comme $V'_m \ll V_m = 24 \text{ L.mol}^{-1} = 2,4.10^{-2} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$, le stockage dans l'alliage est **beaucoup plus efficace.**

Cette technique de stockage utilise un volume environ 400 fois plus petit que le gaz dans les conditions standard. C'est même deux fois plus efficace que la technique de compression usuellement utilisée dans les bouteilles sous pression qui sont à environ 200 bars.

X/ENS Physique PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Ce sujet, composé de quatre parties relativement indépendantes, porte sur l'étude des séismes.

- Dans la première partie, on caractérise les ondes mécaniques dans les solides. Après avoir établi leur équation de propagation, on étudie les aspects énergétiques de cette dernière.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse au mécanisme de génération d'un séisme, qui repose sur la prise en compte de forces de cisaillement à l'interface entre deux plaques tectoniques. On cherche tout d'abord à établir la nouvelle équation de propagation des ondes. À partir de la modélisation d'une fracture, on détermine l'expression du champ de déplacement associé à l'onde en utilisant notamment les lois de Coulomb du frottement. Cette partie se termine par l'étude de l'évolution de la fracture au cours du temps grâce à une méthode énergétique.
- La propagation d'ondes sismiques est étudiée dans la troisième partie. Après avoir démontré les lois de la réfraction à partir d'un modèle ondulatoire, on détermine l'expression du champ de déplacement dans le cas d'une réflexion totale. Ensuite, on exprime les temps de réception des différentes ondes sismiques dans le but de déterminer les célérités dans les différentes couches solides avec une approche expérimentale.
- La dernière partie est consacrée à la détection d'ondes sismiques à travers l'étude d'un sismomètre mécanique. Dans un premier temps, on détermine la sensibilité d'un sismomètre à partir de sa fonction de transfert. Toute la fin de la partie est consacrée à l'amélioration du dispositif en ajoutant notamment un transducteur mécanique et un asservissement en force.

L'épreuve, de longueur typique d'un sujet du concours X/ENS, fait appel à des connaissances relatives aux programmes des deux années telles que la propagation d'ondes, l'optique géométrique, l'étude mécanique en régime sinusoïdal forcé et l'induction. Les thématiques étant suffisamment variées, ce sujet peut notamment servir d'entraînement.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Une force infinie doit être appliquée pour modifier la longueur d'un matériau idéal très rigide.
- 5 La résultante des forces de déformation sur (Ox) subie par la tranche s'écrit

$$F(x + dx, t) - F(x, t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = E S dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 8 Comparer l'équation obtenue à l'équation électromagnétique de Poynting.

Partie II

- 9 Les forces de cisaillement s'appliquent sur une surface $H dx$.
- 15 Lorsque le solide ne glisse pas, il y a continuité de $u(x, t)$ avec le substrat.
- 16 Utiliser l'équation (7) fournie par l'énoncé puis l'intégrer deux fois.
- 17 L'énergie élastique s'écrit par définition

$$E_e = \int_0^H dy \int_0^h dz \int_{-\infty}^{+\infty} e_e(x) dx$$

- 21 Lorsque $G(2\ell_g) < G_c$, l'énergie disponible n'est pas suffisante pour casser les micro-contacts au niveau de l'interface.

Partie III

- 26 Utiliser les relations $k_t = \omega/c_{p2}$ et $k_r = \omega/c_{p1}$.
- 30 Reproduire le schéma de l'énoncé et écrire les différentes formules de trigonométrie pour obtenir les résultats.
- 31 Le paramètre x_d est défini par $T_H(x_d) = T_D(x_d)$.
- 33 Reprendre et adapter le raisonnement de la question 31 au modèle à trois couches.

Partie IV

- 36 Dans le référentiel du bâti, la vitesse de la masse m est $z\vec{e}_z$.
- 40 Écrire la loi de Faraday.
- 43 La présence de la fixation répercute les forces subies par la seconde barre à la première barre.

ÉTUDE ET MESURE DES SÉISMES

I. ONDES MÉCANIQUES DANS LES SOLIDES

1 Le premier rapport $\Delta L/L$ est sans unité et le second F/S est homogène à une pression. Le paramètre E a la même unité que F/S , ainsi

Le module de Young E s'exprime en pascals (Pa).

2 Un matériau idéal très rigide ne se déforme que si la force appliquée est infinie :

Le module de Young est donc infini.

3 La tranche représentée entre x et $x + dx$ s'est allongée de $u(x + dx, t) - u(x, t)$. La variation de longueur dL s'écrit

$$dL = u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Au repos, la longueur de la tranche est dx donc

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

4 Avec la formule de l'énoncé et le résultat de la question précédente,

$$F(x, t) = ES \frac{dL}{dx} = ES \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dérivons cette expression par rapport à x pour obtenir

$$\frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

5 Entre x et $x + dx$, le solide a une masse $dm = \rho S dx$. L'accélération de cette tranche est

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \vec{e}_x$$

Lorsque la déformation en x est positive ($\partial u / \partial x > 0$), la partie du solide à gauche du système exerce alors une force de rappel $F(x, t)$ dirigée selon $-\vec{e}_x$. De même, en $x + dx$, la partie de droite exerce une force de rappel $F(x + dx, t)$ orientée selon $+\vec{e}_x$. La résultante des forces s'écrit ainsi

$$\vec{F}(x + dx, t) - \vec{F}(x, t) = [F(x + dx, t) - F(x, t)] \vec{e}_x = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \vec{e}_x$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tranche du solide et projeté selon \vec{e}_x donne finalement

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

On obtient une équation de d'Alembert.

6 Application numérique :

$$c_p = \sqrt{\frac{7 \times 10^{10}}{25 \times 10^2}} = \sqrt{\frac{7}{25}} \times 10^4 = 5,3 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

7 Une onde est dite longitudinale (respectivement transversale) si la perturbation est parallèle (respectivement normale) à la direction de propagation de l'onde. Le champ de déplacement $\vec{u}(x, t)$ étant selon \vec{e}_x , **l'onde est longitudinale**.

8 Multiplions l'équation obtenue à la question 5 par $\partial u / \partial t$ et utilisons l'expression proposée par l'énoncé, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= E \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= E \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - E \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right]$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

L'équation précédente est à comparer avec l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div } \vec{\Pi}$$

avec u la densité volumique d'énergie et $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting. À une dimension, $\text{div } \vec{\Pi} = \partial \Pi / \partial x$. Par identification,

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ \Pi = -E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Notons respectivement e_c et e_p les termes d'énergies volumiques cinétique et élastique. Finalement,

$$e_c = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2, \quad e_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = -E \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \vec{e}_x$$

X/ENS Modélisation PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Le sujet propose une modélisation du cœur humain et des systèmes cardiovasculaire et sanguin, et plus particulièrement l'étude d'un système de régulation de la fréquence cardiaque au sein du système nerveux autonome (S.N.A.).

- La première partie est une courte introduction qui permet de comprendre les grands principes du fonctionnement du muscle cardiaque, de fixer le vocabulaire et de présenter les principes de régulation. Ses deux questions sont très générales ; la seconde servira plus loin à plusieurs reprises.
- La deuxième partie décrit la physiologie du myocarde (c'est le nom du muscle cardiaque) puis en construit progressivement un modèle.
- La troisième partie étudie la circulation sanguine, d'abord en examinant l'écoulement sanguin dans une conduite cylindrique, puis en prenant en compte l'élasticité des vaisseaux pour aboutir au modèle de Windkessel à quatre éléments.
- Enfin, la dernière partie met en place un modèle numérique du S.N.A. exploitant différentes routines de Python dans un formalisme temporel discrétisé de signaux, assurant un pilotage représentatif de la régulation de la fréquence cardiaque.

Ce sujet est original et tranche avec ceux des dernières années, car il ne s'agit ni de SI ni de physique à proprement parler ; il se rapproche d'une vraie modélisation complète d'un système. La contrepartie est que les questions sont d'intérêt inégal ; par exemple, la dernière partie contient de trop nombreuses questions d'informatique, parfois longues, pour un apport quasi nul. Mais on trouvera un certain plaisir à travailler cet énoncé durant les révisions, si on ne s'attarde pas sur les questions les plus insignifiantes.

INDICATIONS

- 5 Écrire l'équilibre des forces de part et d'autre du muscle.
- 6 Remarquer que la déformation totale est la même que celle de l'élément (EP) et que la longueur totale vaut la somme de celles des éléments (EC) et (ES).
- 10 Il faut tout d'abord intégrer les modules d'élasticité supposés constants puis réutiliser les résultats des questions 5 et 6.
- 11 Il s'agit ici de résoudre l'équation différentielle fournie.
- 14 Il faut ici réutiliser les résultats des questions 6, 10 et 13.
- 15 Le volume des fibres musculaires est celui compris entre les deux cylindres coaxiaux de rayons R_g et $R_g + e$.
- 18 Il faut considérer le demi-cylindre obtenu en coupant verticalement en deux le cylindre de la figure 10, puis effectuer un bilan des forces s'exerçant sur celui-ci.
- 19 Recenser les paramètres dont dépendent le débit et la pression, et rechercher dans les questions précédentes les équations dont la résolution permet leurs calculs.
- 24 Effectuer un bilan des forces et le projeter selon l'axe \vec{x} .
- 25 Intégrer d'abord l'équation différentielle de la question 24, puis le produit vitesse par surface sur une section droite du cylindre pour trouver le débit volumique.
- 26 S'appuyer sur l'hypothèse de l'énoncé concernant la puissance d'entretien.
- 35 Appliquer la relation fournie pour obtenir une expression discrétisée de la dérivée seconde.
- 42 Ne pas oublier les situations où le retard demandé dépasse le numéro d'échantillon.
- 46 La notion de classe est hors-programme mais on peut deviner sa forme en s'inspirant de la classe fournie juste après.

1. PRÉSENTATION DE L'ÉTUDE

1 Développer un modèle numérique du cœur permet d'envisager des simulations de fonctionnement de dispositifs destinés à celui-ci, pour étudier par exemple certaines pathologies, sans être obligé de faire une implantation ou un test sur un patient-cobaye (par exemple, un pacemaker ou un médicament). Cela permet également de prévoir certains comportements avant une opération, typiquement une chirurgie.

2 Les fréquences sont données en battements par minute, on a donc les fréquences en hertz en regardant le nombre correspondant de battements par seconde, ce qui conduit à une plage de fréquences cardiaques allant de 0,667 Hz jusqu'à 3,00 Hz et de pulsations $\omega = 2\pi f$ s'étendant de 4,19 rad.s⁻¹ jusqu'à 18,9 rad.s⁻¹.

2. MODÉLISATION DU MYOCARDE

3 Les sarcomères étant en série, les longueur et longueur à vide équivalentes sont donc la somme de celles de chaque sarcomère de la chaîne. Ainsi,

$$\ell_{c0} = Ns_0 \quad \text{et} \quad \ell_c = Ns$$

Par définition de la déformation, d'après l'énoncé, on a également

$$\varepsilon_c = \frac{\ell_c - \ell_{c0}}{\ell_{c0}} = \frac{s - s_0}{s_0}$$

4 Dans l'expérience associée à la phase (4), le muscle développe une charge sans changer sa longueur : **c'est une contraction isométrique**, durant laquelle le muscle atteint une charge totale correspondant aux poids de P et A, charge supportée grâce à la stimulation électrique du muscle. Dans la phase (5), la charge reste constante mais le muscle se raccourcit : **on est en phase isotonique**.

5 Au niveau de la paroi de gauche, la force surfacique est due à (ES) et (EP), tandis qu'à droite elle est due à (EC) et (EP). Cette force étant la même de chaque côté,

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_p = \sigma_c + \sigma_p$$

soit

$$\sigma_s = \sigma_c \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_s + \sigma_p$$

On aurait aussi pu invoquer l'égalité des forces au point de liaison entre (ES) et (EC) pour obtenir que $\sigma_s = \sigma_c$.

6 La déformation totale s'identifie avec celle de l'élément (EP) puisque c'est la même longueur totale :

$$\varepsilon = \varepsilon_p$$

De plus, la longueur totale vaut la somme des deux longueurs des éléments (ES) et (EC), ainsi on a

$$\ell = \ell_p = \ell_s + \ell_c$$

Or, on peut remarquer que $l_{p0} = l_{s0} + l_{c0}$
 soit
$$\frac{l_p - l_{p0}}{l_{p0}} = \frac{l_s + l_c - l_{s0} - l_{c0}}{l_{p0}}$$

et donc
$$\frac{l_p - l_{p0}}{l_{p0}} = \frac{l_s - l_{s0}}{l_{p0}} + \frac{l_c - l_{c0}}{l_{p0}}$$

soit
$$\varepsilon_p = \frac{l_{s0}}{l_{p0}} \frac{l_s - l_{s0}}{l_{s0}} + \frac{l_{c0}}{l_{p0}} \frac{l_c - l_{c0}}{l_{c0}}$$

En remarquant que $l_{s0}/l_{p0} = (l_{p0} - l_{c0})/l_{p0} = 1 - a$, on a finalement

$$\varepsilon_p = (1 - a)\varepsilon_s + a\varepsilon_c$$

L'énoncé demande plutôt ε_s , par conséquent

$$\varepsilon_s = \frac{1}{1 - a} \varepsilon_p - \frac{a}{1 - a} \varepsilon_c$$

7 Dans le cas d'une contraction isométrique, la longueur l_p ne change pas lorsque le muscle développe une force. En assimilant (EP) à un ressort, si la longueur ne change pas, la force reste donc constante. Si la force σ augmente, les relations de la question 5 montrent qu'alors σ_c et donc σ_s augmentent de la même façon. Dans ce cas, (ES) se comportant lui aussi comme un ressort, la longueur l_s augmente. Finalement, cela correspond à une diminution de l_c puisque la longueur totale ne change pas.

Pour une contraction isométrique, si la force augmente, la force surfacique σ_c aussi et la longueur l_c diminue.

De façon similaire, pour une contraction isotonique, la force reste constante et la longueur totale l_p diminue car c'est une contraction. Par conséquent, la force développée par (EP) diminue, celle développée par (ES) ou (EC) doit donc augmenter pour maintenir la force totale constante. La longueur l_s augmente donc, ce qui diminue la longueur l_c .

Pour une contraction isotonique, la force surfacique σ_c augmente aussi et la longueur l_c diminue.

8 D'après le résultat de la question précédente, une contraction isométrique conduit à une augmentation de σ_c et une diminution de l_c , donc de ε_c . Ainsi, on a

$$\frac{d\sigma_c}{dt} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varepsilon_c}{dt} = \dot{\varepsilon}_c < 0$$

Sans que cela ne soit dit dans le sujet, on suppose dans la suite que les paramètres ν_c , λ_c et k_c sont tous positifs, ce qui semble implicite.

On constate à partir du modèle retenu qu'automatiquement u doit être positif lors d'une contraction, sinon les dérivées ne peuvent avoir des signes cohérents. Par suite,

$$0 < \frac{d\sigma_c}{dt} = (\nu_c + \lambda_c\sigma_c) \dot{\varepsilon}_c + k_c u$$

puis
$$-(\nu_c + \lambda_c\sigma_c) \dot{\varepsilon}_c < k_c u$$

et finalement

$$0 < |\dot{\varepsilon}_c| = -\dot{\varepsilon}_c < \frac{k_c u}{\nu_c + \lambda_c\sigma_c}$$

Le taux de déformation maximal est ainsi obtenu en minimisant σ_c , soit

$$|\dot{\varepsilon}_c|_{\max} = \frac{k_c u_{\max}}{\nu_c}$$