Toutes les maths

L1
L2
CAPES

ANALYSE
EN 40 FICHES

François
Cottet-Emard

- Résumés de cours
- + de 140 exercices corrigés
- Méthodologie et conseils

+ EN LIGNE
OFFERT

Exercice corrigés, problèmes, démonstrations

deboeck
SUPÉRIEUR

Toutes les maths
Analyse en 40 fiches

deboeck SUPÉRIEUR

Chez le même éditeur :

Toutes les maths pour bien commencer sa licence, Cottet-Emard F., 2017
Les 100 exercices de maths pour bien commencer sa licence, Costantini G., 2021
Toutes les maths – Algèbre et Probabilités en 62 fiches, Cottet-Emard F., 2021

Toutes les maths

Analyse en 40 fiches

François Cottet-Emard

de boeck SUPÉRIEUR

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : septembre 2021
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2021/13647/111

ISBN : 978-2-8073-2851-8

Sommaire

Introduction

Cet ouvrage contient l'analyse couramment étudiée dans les années L1L2 des Universités et dans les deux années des classes préparatoires. Il est formé de 40 fiches, ce que l'on appelait autrefois chapitres, contenant chacune le cours avec de nombreux exemples et des exercices corrigés. Cet ouvrage d'Analyse est découpé en quatre grandes parties : fonctions réelles de la variable réelle, intégration et convergence, topologie et calcul différentiel, équations différentielles. Les prérequis sont simplement ceux du Lycée, Terminale S ou ES. La première partie reprend les bases du Lycée, les présentant de façon plus théorique avec toutes les démonstrations de niveau L1L2 et se termine par les suites. La seconde partie explore l'intégrale de Riemann, définie et généralisée, les séries, suites et séries de fonctions et leurs convergences, les intégrales dépendant d'un paramètre avec le théorème de convergence dominée (tout en restant au niveau L1L2), les séries de Fourier et les intégrales multiples. La troisième partie présente la topologie en dimension finie et les fonctions de plusieurs variables, avec le théorème des fonctions implicites et les courbes paramétrées. La dernière partie présente les équations différentielles élémentaires sous une forme à la fois complète mais simple, et les systèmes différentiels linéaires.

Son originalité et sa modernité viennent de ses deux supports, papier et en ligne. Le cours et certains exercices immédiats et vitaux sont sur le support papier, mais chaque fiche renvoie à des données en ligne : certains exemples et certains exercices, avec leurs corrigés, ont été renvoyés en ligne. Il en va de même de la grande majorité des démonstrations, renvoyées en ligne. L'ouvrage contient aussi des grands problèmes récapitulatifs, entièrement renvoyés aussi en ligne. Environ 20% du contenu de l'ouvrage se trouve ainsi en ligne, fichiers PDF.

Cette partie en ligne répond à une exigence actuelle, un livre de mathématiques ne peut plus être entièrement sur support papier, et doit utiliser les outils des nouvelles technologies et les logiciels modernes qui remplacent les calculs faits autrefois à la main. Ces renvois en ligne incitent le lecteur à une curiosité nouvelle et à utiliser les nouvelles technologies de l'information. Par ailleurs, les textes en ligne sont aussi plus colorés, plus aérés et conviviaux, puisque la contrainte du nombre de pages et de couleurs n'a plus grande importance. Il y a par exemple de nombreux graphiques, courbes et surface en couleur.

Attention, les renvois en ligne concernent des notions aussi importantes que celles exposées sur papier dans l'ouvrage. Les exemples et les exercices en ligne ne sont ni des évidences trop simples, ni au contraire des exercices trop compliqués qui seraient uniquement des compléments. Ce sont des exemples et exercices comme les autres. On le voit très bien à leur numérotation dans chaque fiche : elle respecte une alternance entre les numéros sur papier et les numéros en ligne. Certaines fiches ont d'ailleurs plus d'exercices en ligne que sur papier.

Certaines démonstrations courtes à lire impérativement en même temps que l'énoncé du théorème se trouvent dans la fiche de cours, sur papier. Les grosses démonstrations, plus longues ou qui peuvent attendre un peu pour la compréhension du théorème, sont systématiquement en ligne.

D'une façon générale, cette double découpe de l'ouvrage doit titiller le lecteur et l'inciter à adopter les deux démarches, une approche visuelle instantanée sur papier et une recherche (très rapide en pratique) en ligne.

Un mode d'emploi très détaillé de l'accès en ligne est donné après cette introduction globale.

Il n'y a pas d'ordre imposé par un quelconque programme officiel, comme c'est le cas dans l'enseignement secondaire. L'ordre respecte ici une logique linéaire de progression des difficultés : en analyse, il est nécessaire de suivre une progression quasiment imposée, on ne peut pas étudier la deuxième partie de l'ouvrage avant la première, par exemple. Cela est moins vrai dans le volume d'Algèbre de la même collection, où l'arithmétique et les graphes sont quasiment indépendants du restant de l'ouvrage.

Le volume contient certaines notions marquées **ASPL** , à sauter en première lecture. Il s'agit de compléments qui sont intéressants dans l'optique de la poursuite d'études en année L3 de mathématiques ou bien de simple culture générale. Ce ne sont pas des notions basiques nécessaires à maîtriser en L1L2.

Un formulaire se trouve en fin de volume. Il contient les grandes formules classiques à maîtriser absolument en algèbre comme en analyse, la majorité d'entre elles venant du Lycée. Il contient aussi une liste des instructions basiques du langage Xcas (logiciel gratuit à télécharger), langage qui est utilisé pour effectuer des calculs ou des tracés de courbes et surfaces.

Descriptif des ressources en ligne

Le texte papier contient le cours, avec des exemples, les énoncés des théorèmes, certaines démonstrations et des exercices. La partie en ligne contient certains exemples, la majorité des démonstrations (les plus longues), certains exercices, des images en couleur ne pouvant pas être incorporées dans le volume papier noir et blanc et les problèmes récapitulatifs. À chaque fiche papier sont associés a priori deux fichiers en ligne, l'un contenant les exemples, certaines images couleur et les démonstrations, le second contenant les exercices renvoyés en ligne et certaines images couleur. Les fiches ne contiennent pas toutes à la fois des exemples en ligne, des démonstrations en ligne, des images couleur et des exercices en ligne, cela dépend de chaque contenu pédagogique. Il y a donc a priori deux liens pour chaque fiche, mais il y a aussi des fiches avec un seul lien en ligne et quelques fiches sans aucune ressource en ligne.

L'existence de ressources en ligne au niveau du cours et/ou au niveau des exercices est indiquée par les textes **J'apprends en ligne** pour la partie cours et/ou **Je m'entraîne en ligne** pour les exercices.

J'apprends en ligne ↪ **(*Lien et QR code indiqués*)**

Ce lien concerne la partie « cours », et oriente vers les exemples, les démonstrations et les éventuelles images en couleur de la partie cours de la fiche. Il est donné en deuxième page de la fiche par une adresse et un QR code.

Dans le courant de la partie « cours » de la fiche, pour chaque exemple ou démonstration ou image concerné, une indication renvoie vers le complément en ligne, sans rappeler cette adresse. Il s'agit de :

Exemple 3 en ligne

Cette indication renvoie vers l'exemple 3 de la fiche courante, qui se trouve donc en ligne. Tous les exemples renvoyés en ligne d'une même fiche se trouvent en première page du fichier PDF « cours en ligne » associé à la fiche. Ils sont classés par ordre de numéros, à savoir l'ordre de la progression du cours.

Démonstration en ligne

Cette indication renvoie vers la démonstration d'un résultat, clairement identifié par le même titre/numéro de théorème dans la fiche papier et dans le fichier PDF en ligne. Les démonstrations sont aussi dans l'ordre de la progression du cours, et situées après la page des exemples.

Dessin couleur en ligne

Cette indication suit une image en noir et blanc du cours, reprise en couleur en ligne, en agrandissant la taille et en utilisant plus de couleurs.

Je m'entraîne en ligne ↪ (*Lien et QR code indiqués*)
exercices supplémentaires (*numéros indiqués*)

La seconde partie de chaque fiche papier est consacrée aux exercices, avec d'abord les énoncés et ensuite les corrigés. Les exercices renvoyés en ligne sont dans un fichier PDF accessible par le lien et le QR code indiqués comme ci-dessus en tête de la page des énoncés. Les numéros des exercices en ligne sont précisés dans la seconde ligne « exercices supplémentaires ».

Prenons (par exemple) le cas de l'indication « exercices supplémentaires 3,5 » placée en tête de la liste des exercices : elle renvoie vers les exercices 3 et 5 en ligne de la fiche courante. Dans le cas où la fiche compte (par exemple) au total 8 exercices, les numéros 3 et 5 sont renvoyés en ligne, et toute la numérotation est conservée dans la version papier (qui contient donc les exercices numérotés 1,2,4,6,7,8) comme en ligne (les deux exercices sont numérotés 3 et 5). L'idée est de situer les exercices dans une même progression pédagogique, pour bien montrer que les exercices en ligne ne sont pas plus difficiles que ceux sur papier, ni de simples compléments.

Certains exercices du volume papier sont aussi illustrés par une image couleur se trouvant en ligne, dans le fichier des exercices en ligne de la fiche. Ces images sont accessibles par l'indication

Dessin couleur en ligne

Cette indication suit l'illustration en noir et blanc d'un exercice, reprise en couleur en ligne, en agrandissant la taille et en utilisant plus de couleurs.

Bibliothèque de courbes et surfaces en couleur

Les fiches 30 et 33 sont illustrées en ligne par des images en couleur représentant quelques courbes paramétrées et quelques surfaces intéressantes : il s'agit plutôt de culture générale, avec des exemples qui ne sont pas abordés dans le cours. Le lien vers cette « bibliothèque » de nouvelles courbes ou surfaces est celui donné au début de chacune de ces deux fiches de cours, et le paragraphe 0 de ces fiches rappelle l'existence de cette bibliothèque.

Problèmes récapitulatifs ↪

Les 16 problèmes récapitulatifs sont stockés, énoncés et corrigés, dans un même fichier PDF, appelé fiche 40 et dont l'accès est précisé à la fin de la page suivante « Se connecter aux ressources en ligne ».

Se connecter aux ressources en ligne

Voici comment accéder à un fichier PDF se trouvant en ligne.

Prenons l'exemple de la fiche 23, à qui est associée un fichier PDF contenant les exemples et les démonstrations en ligne de la fiche et un fichier PDF contenant les exercices en ligne de cette même fiche. Ce sera le même principe pour toutes les autres fiches.

Accès au fichier DMAnalyse23 des exemples + démonstrations : le fichier PDF des exemples et démonstrations en ligne de la fiche 23 s'appelle DMAnalyse23. On y accède en tapant, dans la barre des adresses du navigateur :

www.lienmini.fr/dmanalyse23

ou bien on scanne le QR code qui se trouve en deuxième page de la fiche 23 dans le volume papier. Le lien ci-dessus est aussi rappelé en deuxième page de la fiche.

Accès au fichier EXAnalyse23 des exercices : le fichier PDF des exercices en ligne de la fiche 23 s'appelle EXAnalyse23. On y accède en tapant, dans la barre des adresses du navigateur :

www.lienmini.fr/exanalyse23

ou bien on scanne le QR code qui se trouve en tête des exercices de la fiche 23 dans le volume papier. Le lien ci-dessus est aussi rappelé au début de la page des énoncés des exercices.

D'une façon générale :
Tout renvoi en ligne vers un exemple ou une démonstration ou une image couleur (entre autre les bibliothèques d'images des fiches 30 et 33) se trouvant dans la partie « cours » d'une fiche est accessible à partir du lien/QRcode placé en deuxième page de la fiche.
Tout renvoi en ligne vers un exercice ou une image couleur se trouvant dans la partie « exercices » d'une fiche est accessible à partir du lien/QRcode placé en tête de la page des énoncés des exercices.

Accès aux problèmes récapitulatifs : le fichier PDF des problèmes en ligne du volume est accessible en tapant, dans la barre des adresses du navigateur :

www.lienmini.fr/problemesanalyse

ou bien en scannant le QR code suivant :

COURS 1
Généralités sur $\mathbb{R}$

[MOTS-CLÉS : INTERVALLE, VOISINAGE, MAJORÉ, MINORÉ, BORNE, SEGMENTS EMBOÎTÉS, BOLZANO-WEIERSTRASS, DENSITÉ]

Après quelques rappels, cette fiche introduit des propriétés fines de $\mathbb{R}$, non démontrables en L1L2, et qui seront utilisées parcimonieusement dans les premières fiches de l'ouvrage, et un peu plus ensuite.

1 Intervalles et voisinages

- $\mathbb{R}$ est constitué des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres rationnels (de la forme p/q où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) et des autres, les irrationnels comme $\sqrt{2}$ ou π. Ce sont eux les « plus nombreux ». On a les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Un intervalle d'extrémités a et b, avec $a < b$, est l'ensemble des réels compris, au sens strict et/ou large entre a et b. On a l'intervalle ouvert $]a,b[$, le **segment** $[a,b]$ et les intervalles semi-ouverts $[a,b[$ et $]a,b]$.
- Une demi-droite $]-\infty,A[$ est l'ensemble des réels strictement inférieurs à A, et $]A,+\infty[$ est l'ensemble des réels strictement plus grands que A. On définit de même $]-\infty,A]$ et $[A,+\infty[$.

Un voisinage d'un réel x_0 est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert $]x_0-h,x_0+h[$ de centre x_0.

Méthodologie

On se contentera de prendre pour voisinages de x_0 les intervalles ouverts $]x_0-h,x_0+h[$ de centre x_0. L'expression « au voisinage de x_0 » signifie donc « dans un intervalle ouvert bien choisi de centre x_0 ». On ne précise pas, en général, le rayon h de cet intervalle.

Exemple 1 : Soit $a > 0$. Il existe un voisinage de a ne contenant que des nombres strictement positifs. Par exemple $]a-a/2,a+a/2[=]a/2,3a/2[$.

Exemple 2 : Au voisinage de $x_0 = 2$, la quantité x^2-3 est strictement positive. Il suffit de se placer dans $]1.9;2.1[$.

Un voisinage de $-\infty$ est une demi-droite $]-\infty,A[$ et un voisinage de $+\infty$ est une demi-droite $]A,+\infty[$.

Exemple 3 : Au voisinage de $+\infty$, on a $x-45\sin x > 0$. Il suffit de se placer sur $]45,+\infty[$, puisque $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Méthodologie

En pratique, *au voisinage de* veut dire **tout près de**. *Au voisinage de* x_0 sous-entend que le rayon h est « très petit ». *Au voisinage de* $+\infty$ sous-entend que A est positif « très grand » et *au voisinage de* $-\infty$ sous-entend que A est négatif de « très grande valeur absolue ».

2 Partie majorée, minorée, bornée

- Dans tout ce paragraphe, E est une partie non vide de $\mathbb{R}$, différente de $\mathbb{R}$.

2.1 Partie majorée

On dit que E est majorée quand il existe un réel M supérieur ou égal à tous les éléments de E :

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in E)(x \leq M).$$

Un tel réel M s'appelle majorant de E.

- Si M est un majorant de E, tout réel $M' > M$ est encore un majorant de E.

Exemple 4 : Tout intervalle E d'extrémités a et b est majoré, l'extrémité supérieure b étant un majorant de E. L'ensemble des réels x vérifiant $x^3 - 3x < 67$ est majoré par 10, comme le montre une étude rapide de fonction. La partie $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.

- Dire que le réel μ **n'est pas** un majorant de E signifie qu'il existe au moins un élément x de E qui est **strictement** plus grand que μ.

2.2 Partie minorée

On dit que E est minorée quand il existe un réel m inférieur ou égal à tous les éléments de E :

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in E)(m \leq x).$$

Un tel réel m s'appelle minorant de E.

- Si m est un minorant de E, tout réel $m' < m$ est encore un minorant de E.

Exemple 5 : Tout intervalle E d'extrémités a et b est minoré, l'extrémité inférieure a étant un minorant de E. L'ensemble des réels x vérifiant $x^3 - 3x > 67$ est minoré par 2, comme le montre une étude de fonction. La partie $\mathbb{Z}$ n'est pas minorée, et la partie $\mathbb{N}$ est minorée.

2.3 Partie bornée

On dit que E est bornée quand elle est à la fois majorée et minorée :

$$(\exists\, m,M \in \mathbb{R})(\forall x \in E)(m \leq x \leq M).$$

- Une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans un segment $[m,M]$. D'ailleurs, le mot « segment » est une abréviation de « intervalle fermé borné ».

Exemple 6 : Tout intervalle d'extrémités a et b est borné. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-12 < x^3 - 34\cos x < 53$ est borné : il est inclus dans l'ensemble des solutions de $-12 - 34 < x^3 < 53 + 34$, qui est un intervalle borné.

Point d'interrogation

Sachant qu'une partie majorée admet **une infinité** de majorants, y en a-t-il un « plus intéressant » que les autres ? Sachant qu'une partie minorée admet une infinité de minorants, y en a-t-il un « plus intéressant » que les autres ?

- Cette question fondamentale a une réponse dans les deux paragraphes suivants.

3 Borne supérieure d'une partie non vide majorée

- Prenons une partie non vide E majorée (par exemple) par $M = 1$. Dire, ce qui est vrai, que E est majorée par 2.567 ne présente aucun intérêt, car 2.567 est « plus loin de E que 1 », puisque E est incluse par hypothèse dans $]-\infty,1]$. Il est **bien plus intéressant** de regarder si des réels **plus petits** que 1 sont encore des majorants de E, histoire de « se rapprocher de E ».
- Parmi tous les majorants de E, celui qui serait le plus intéressant est celui qui est « le plus proche possible de E » : un nombre qui est plus grand que tous les éléments de E, mais qui en est « tout près » : ce doit être le plus petit majorant possible de E. Le théorème fondamental suivant assure son existence :

Théorème de la borne supérieure.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un majorant **plus petit** que tous les autres majorants. On l'appelle borne supérieure de E, et on le note $\sup E$.
Attention, en général, $\sup E$ n'appartient pas à E.

- Ce théorème est admis : on ne peut le démontrer qu'avec une construction complète de $\mathbb{R}$ à partir des rationnels.
- Ecrire que $M = \sup E$ demande donc deux choses :
  - M est un majorant de E : $(\forall x \in E)(x \leq M)$.
  - Un réel strictement inférieur à M, que l'on peut noter $M - \varepsilon$, n'est pas un majorant de E : il existe donc au moins un élément $x \in E$ supérieur ou égal à $M - \varepsilon$.

  On peut résumer ceci dans le point suivant :

Méthodologie

Le réel M est la borne supérieure de E si et seulement si :
- $(\forall x \in E)(x \leq M)$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, le segment $[M - \varepsilon, M]$ contient au moins un élément de E.

- La borne supérieure est dans E si et seulement si E admet un **plus grand élément**, et la borne supérieure est ce plus grand élément.

Exemple 7.a : C'est le cas de $E =]0,1]$ ou de $E = \{1,1/2,1/3,1/4,\cdots\}$, où $\sup E = 1$ est dans E.

- Si E est une partie finie de $\mathbb{R}$, elle admet évidemment un plus grand élément, qui en est donc la borne supérieure.
- Le seul cas vraiment intéressant de borne supérieure est lorsque E est infini et ne possède pas de plus grand élément.

> **Méthodologie et Philosophie**
>
> La borne supérieure de E est le réel qui « remplace » le plus grand élément de E lorsque E n'en a pas.

Exemple 7.b : Soit $E = \{1/2,2/3,3/4,4/5,\cdots\}$ l'ensemble de tous les réels de la forme $1-1/n$ pour $n \geq 2$. E est clairement majoré par 1, et $\sup E$ est donc inférieure ou égale à 1. Tout segment $[1-\varepsilon,1]$ contient au moins un élément de E : il suffit de prendre $n > 1/\varepsilon$. On a donc $\sup E = 1$, et elle n'appartient pas à E.

Exemple 8 : La borne supérieure d'un intervalle d'extrémités a et b est égale à b. Elle appartient à l'intervalle dans les cas $]a,b]$ et $[a,b]$, mais n'en fait pas partie dans les cas $]a,b[$ et $[a,b[$.

4 Borne inférieure d'une partie non vide minorée

- On a un résultat analogue pour les parties non vides et minorées de $\mathbb{R}$, où c'est le plus grand minorant de E qui est intéressant.

> **Théorème de la borne inférieure.** Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet un minorant **plus grand** que tous les autres minorants. On l'appelle borne inférieure de E, et on le note $\inf E$.
>
> Attention, en général, $\inf E$ n'appartient pas à E.

- Ecrire que $m = \inf E$ demande donc deux choses :
  - m est un minorant de E : $(\forall x \in E)(m \leq x)$.
  - Un réel strictement supérieur à m, que l'on peut noter $m+\varepsilon$, n'est pas un minorant de E : il existe donc au moins un élément $x \in E$ inférieur ou égal à $m+\varepsilon$.

  On peut résumer ceci dans le point suivant :

> **Méthodologie**
>
> Le réel m est la borne inférieure de E si et seulement si :
> - $(\forall x \in E)(m \leq x)$.
> - Pour tout $\varepsilon > 0$, le segment $[m,m+\varepsilon]$ contient au moins un élément de E.

- La borne inférieure de E n'a aucune raison d'appartenir à E. Elle en fait partie lorsque E possède un plus petit élément : par exemple $\inf[a,b[= a$. Le cas intéressant est celui où $\inf E$ n'appartient pas à E. Voici un exemple de la vie sportive très parlant :

Exemple 9.a : Supposons que la vie sur terre soit éternelle, et appelons E l'ensemble des performances, sur l'éternité, au 100m. C'est un ensemble non vide contenant une infinité d'éléments, la vie étant supposée durer indéfiniment sur terre. E est clairement minoré par un nombre strictement positif : aucun homme ne courra le 100m en moins de (par exemple!) un centième de seconde. E admet donc une borne inférieure m supérieure ou égale à 0.01, appartenant ou non à E. Interprétons les conditions caractérisant la borne inférieure :

Exemple 9.b :

(i) Personne ne mettra jamais, au grand jamais, moins de m secondes pour courir 100m.

(ii) Dire que $m \in E$ signifie qu'il existera un jour un homme établissant le record du monde universel : il ne sera jamais battu.

(iii) Dire que $m \notin E$ signifie la chose suivante : personne ne mettra jamais m secondes pour courir 100m, mais pour tout $\varepsilon > 0$, il y aura un homme qui mettra moins de $m+\varepsilon$ secondes : on s'approchera indéfiniment près de m. Tout record du monde sera temporaire, systématiquement battu plus tard.

Exemple 9.c : La valeur m existe, les mathématiques le disent, mais elle est inconnue. Les différents records du monde actuellement battus les uns après les autres s'approchent de m, vraisemblablement...

Exemple 9.d : On peut en dire autant pour la borne supérieure. L'ensemble F contenant le nombre de victoires d'un coureur sain au tour de France est un ensemble non vide dont on peut raisonnablement admettre qu'il est majoré par 100, même si l'espérance de vie augmente ... Il possède donc une borne supérieure, qui est d'ailleurs son plus grand élément, puisque l'on est dans les entiers. Actuellement, on sait que $\sup F \geq 5$ (5 victoires pour Anquetil, Mercks, Hinault, Indurain). Mais ce nombre 5 est-il la borne supérieure de F ? Réponse dans une éternité !

5 Théorèmes sur les suites monotones

- Voici les grands théorèmes, qui seront démontrés grâce à la borne supérieure/inférieure, dans le chapitre sur les suites :

Théorème 1. Une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée. Une suite décroissante converge si et seulement si elle est minorée.

- Ce théorème s'énonce géométriquement d'une façon très parlante. On dit qu'une suite $\big([a_n,b_n]\big)$ de segments est emboîtée quand on a les inclusions

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \supset \cdots .$$

- L'énoncé géométrique est maintenant :

Théorème 2. Soit $\left([a_n,b_n]\right)$ une suite de segments emboîtés dont la longueur $b_n - a_n$ tend vers 0. Alors il existe un et un seul réel appartenant à tous les segments.

Ce théorème sert par exemple à démontrer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue.

- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ et une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

6 Point d'accumulation d'une partie infinie de $\mathbb{R}$

On dit que a est un point d'accumulation de la partie E lorsque tout voisinage de a contient **une infinité** de points de E.

Exemple 10 : Le réel 1 est point d'accumulation de l'ensemble $E = \{1/2,2/3,3/4, 4/5,\cdots\}$ déjà rencontré. On voit assez facilement que c'est le seul. Cela vient du fait que E est l'ensemble des termes d'une suite convergeant vers 1.

Exemple 11 : Tout réel de $[0,1]$ est point d'accumulation de $E =]0,1[$.

Exemple 12 [admis] : Tout réel est point d'accumulation de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels. Cela signifie que tout intervalle réel non réduit à un point contient **une infinité** de nombres rationnels. De même, tout réel est point d'accumulation de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels : tout intervalle réel non réduit à un point contient **une infinité** de nombres irrationnels.

ASPL

7 Théorème de Bolzano-Weierstrass

- Ce théorème admet deux énoncés équivalents, mais très importants tous les deux :

Bolzano-Weierstrass 1.
Toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ admet au moins un point d'accumulation.

Bolzano-Weierstrass 2.
Toute suite bornée contient une sous-suite convergente.

- Cet énoncé signifie que si la suite $\{x_n\}$ est bornée, on peut trouver une infinité d'entiers $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k \cdots$ tels que la suite $\left(x_{n_k}\right)$ converge vers une limite finie.

Exemple 13 : La suite de terme général $u_n = \sin n$ ne converge pas. Mais, comme elle est bornée, elle contient au moins une sous-suite convergente.

- Ce théorème intervient dans des démonstrations théoriques, par exemple celle disant que toute fonction continue sur un segment y présente un minimum et un maximum.

8 Théorèmes de densité

> Une partie E est dite dense dans $\mathbb{R}$ quand tout intervalle ouvert contient une infinité de points de E.

Exemple 14 : L'exemple 12 signifie que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et de même pour l'ensemble des irrationnels.

Exemple 15 [admis] : La notion de valeur décimale approchée à 10^{-n} près d'un réel signifie que l'ensemble des nombres décimaux, à savoir des rationnels de la forme $\dfrac{A}{10^n}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple 16 [admis] : L'ensemble des termes de la suite $(\sin n)$ est dense dans $[-1,1]$. Tout intervalle ouvert inclus dans $[-1,1]$ contient une infinité de termes de la suite.

1 EXERCICES

Exercice 1

Calculer, si elles existent, les bornes inférieures et supérieures des parties suivantes, et dire si elles appartiennent à E ou non :

1. $E_1 =]-7{,}4] \cup \{12\}$; $E_2 =]-\infty{,}3[\cap[-2{,}9]$; $E_3 =]-\infty{,}3[\cup[-2{,}9]$.

2. $E_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$.

Exercice 2

Soit E l'ensemble des réels de la forme $0{,}a_1a_2a_3\cdots$ où les décimales a_i vérifient (i) $a_1 + a_2 + a_3 = 11$, (ii) il y a seulement un nombre fini de décimales **non nulles**.

1. Quelle est la plus grande valeur possible de a_1, et pour cette valeur la plus grande valeur possible de a_2, puis de a_3 ?

2. Donner le plus grand nombre possible appartenant à E et dont toutes les décimales sont nulles à partir de a_5. Idem à partir de a_6, à partir de a_7. Généraliser.

3. Donner la valeur de $\sup E$. Est-elle dans E ?

Exercice 3

Soit E l'ensemble des réels de la forme $1/n + 1/m$ où $n{,}m$ sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.

1. Montrer que E possède un plus grand élément, et en déduire $\sup E$.

2. Donner un minorant évident de E. En regardant les éléments de E correspondant à $n = m$, calculer $\inf E$.

3. Montrer que 0 est un point d'accumulation de E.

Exercice 4

On se donne $[a_0{,}b_0] = [0{,}1]$, et on construit une suite de segments $[a_n{,}b_n]$ de la façon suivante : on coupe $[a_n{,}b_n]$ en trois parties égales, et on en choisit une **aléatoirement** : on l'appelle $[a_{n+1}{,}b_{n+1}]$, et on itère le processus.

1. Montrer qu'il existe un et un seul réel appartenant à tous les segments $[a_n{,}b_n]$.

2. Donner ce réel (i) lorsque l'on prend systématiquement le premier tiers de chaque segment (ii) quand on prend systématiquement le troisième tiers (iii) quand on prend systématiquement celui du milieu.

1 CORRIGÉS

Exercice 1

1. inf $E_1 = -7$ n'est pas dans E_1 et sup $E_1 = 12$ est dans E_1.

On a $E_2 = [-2{,}3[$, avec inf $E_2 = -2$ qui est dans E_2 et sup $E_2 = 3$ qui n'y est pas.

On a $E_3 =]-\infty{,}9]$: il n'admet pas de borne inférieure car il n'est pas minoré, et sup $E_3 = 9$ est dans E_3.

2. On a $E_4 =]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. On a inf $E_4 = -\sqrt{2}$ et sup $E_4 = \sqrt{2}$, et elles ne sont pas dans E_4.

Exercice 2

1. Il s'agit de $a_1 = 9$, suivi de $a_2 = 2$ et de $a_3 = 0$. Les nombres les plus grands de E commencent par $0{,}920$.

2. Il s'agit de $0{,}9209$ puis de $0{,}92099$ puis de $0{,}920999$ et ainsi de suite, avec rien que des 9, mais en nombre fini, à partir de a_4.

3. sup E est inférieure ou égale à $0{,}921$, puisque les nombres les plus à droite dans E commencent par $0{,}920$. Mais sup E doit être supérieure ou égale à tous les $0{,}920999999999\ldots9$. On a exactement sup $E = 0{,}921$, puisque $0{,}9209999999$ avec n chiffres 9 à partir de a_4 est égal à $0{,}921 - 10^{-n-3}$. Tout intervalle $[0{,}921-\varepsilon{,}0{,}921]$ contient au moins un élément de E. Elle n'est pas dans E puisque $a_1 + a_2 + a_3 = 12$.

Exercice 3

1. Pour $n = m = 1$, on a le plus grand élément de E, qui est 2 : c'est donc la borne supérieure de E.

2. E est minoré par 0, puisque tous ses éléments sont positifs. Les éléments de la forme $1/n + 1/n = 2/n$ forment une suite qui tend vers 0. Tout segment $[0{,}0+\varepsilon]$ contient donc au moins un élément de E, il suffit de prendre $n > 2/\varepsilon$ et l'élément $1/n + 1/n$. On a les deux conditions affirmant que 0 est la borne inférieure de E.

3. L'intervalle $]-\varepsilon{,}\varepsilon[$ contient tous les éléments $1/n + 1/n$ lorsque $n > 2/\varepsilon$, ce qui en fait une infinité. Tout voisinage de 0 contient une infinité d'éléments de E : c'est la définition du point d'accumulation.

Exercice 4

1. Par construction, on a $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$. On a une suite de segments emboîtés. Par ailleurs, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/3$, à savoir (suite géométrique de raison $1/3$), $b_n - a_n = 1/3^n$. Les longueurs des intervalles tendent vers 0. Le théorème des segments emboîtés affirme qu'il existe un et un seul réel commun à tous les segments.

2. (i) On a $[a_1,b_1] = [0{,}1/3]$, $[a_2,b_2] = [0{,}1/9]$, $[a_3,b_3] = [0{,}1/3^3]$ et ainsi de suite, $[a_n,b_n] = [0{,}1/3^n]$. Le réel commun est 0.

(ii) De façon analogue, on a $[a_n,b_n] = [1 - 1/3^n{,}1]$, et le réel commun est 1.

(iii) On voit ensuite que $[a_n,b_n]$ est le segment de longueur $1/3^n$ centré en $1/2$, puisque $[a_{n+1},b_{n+1}]$ est toujours centré au milieu de $[a_n,b_n]$. Le réel est donc $1/2$.

COURS 2
Généralités sur les fonctions

[MOTS-CLÉS : PARITÉ, PÉRIODE, GRAPHE, IMAGE DIRECTE, RÉCIPROQUE, INJECTION, BIJECTION, MAJORÉE, MINORÉE, BORNÉE, VARIATION, TAUX D'ACCROISSEMENT, EXTREMA, COMPOSITION]

Une fonction réelle de la variable réelle est une application f d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette partie D est le domaine de définition de f, et c'est généralement une réunion d'intervalles.

1 Généralités

- Ne pas confondre la fonction f avec le résultat $f(x)$. La fonction est le processus associant à chaque réel $x \in D$ le nombre $f(x)$. Donc, ne jamais parler de « la fonction $f(x)$ », mais de « la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+3} - \sin x$ » ou analogue. On peut aussi écrire « soit $f : x \in D \mapsto \sqrt{x+3} - \sin x$ ».
- L'image directe par f d'une partie A du domaine de définition est l'ensemble des $f(x)$ lorsque x décrit A. On la note $f(A)$, et on a donc $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Exemple 1 : Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$. On a $f([0,\pi/6]) = [0,1/2]$. Pour $g : x \mapsto x^2$, on a $g([-2,1]) = [0,4]$.

Exemple 2 : $f(D)$, où D est le domaine de définition de f, est l'ensemble des valeurs prises par f.

- L'image réciproque par f d'une partie B de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des $x \in D$ tels que $f(x) \in B$. On la note $f^{-1}(B)$, et on a donc $f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\}$.

Exemple 3 : Pour $f : x \in [0,2\pi] \mapsto \sin x$, on a $f^{-1}([0,1/2]) = [0,\pi/6] \cup [5\pi/6,\pi]$.

Méthodologie

On étudiera en fiche 5 à quelle condition l'image directe d'un intervalle est un intervalle. L'exemple 3 montre que l'image réciproque d'un intervalle n'a aucune raison d'être un intervalle.

- La courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x,f(x))$ lorsque x décrit D. En abrégé, on parle souvent de la « courbe $y = f(x)$ » ou bien du graphe de f, bien que ce soit un peu un abus de langage.

Exemple 4 : La courbe représentative d'une fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole.

2 Fonction paire, fonction impaire

Ces deux notions supposent que le domaine de définition D vérifie la propriété de « symétrie du domaine de définition » : $(\forall x \in D)(-x \in D)$.

La fonction f est paire lorsque, pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = f(x)$. Elle est impaire lorsque, pour tout $x \in D$, on a $f(-x) = -f(x)$.

Exemple 5 : [on est avec $D = \mathbb{R}$]
Les fonctions $x \mapsto x^n$ sont paires lorsque n est un entier pair et impaires pour n entier impair, ce qui justifie la terminologie. La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire. La fonction $x \mapsto x \sin x$ est paire, comme produit de deux fonctions impaires, d'après la règle des signes.

- Pour une fonction paire f, les points $(x,f(x))$ et $(-x,f(-x)) = (-x,f(x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : celui-ci est axe de symétrie de la courbe.
- Pour une fonction impaire f, les points $(x,f(x))$ et $(-x,f(-x)) = (-x,-f(x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O : l'origine est centre de symétrie de la courbe.

Méthodologie

Il vaut mieux être en axes orthonormés pour bien visualiser ces symétries. On peut se contenter d'étudier une fonction paire ou impaire sur $[0,+\infty[$, et de compléter la courbe par symétrie.

- Attention, la majorité des fonctions ne sont ni paires ni impaires : penser à $x \mapsto x+1$.

3 Fonction périodique

La fonction f est périodique quand il existe un réel $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout x du domaine de définition. Le nombre T est une période de f.

- Ceci sous-entend que pour tout $x \in D$, alors $x + T \in D$.

Exemple 6 : Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T = 2\pi$: $\sin(x+2\pi) = \sin x$ et $\cos(x+2\pi) = \cos x$ pour tout x. La fonction tangente, définie sur $\mathbb{R}$ privé des points $\pi/2 + k\pi$ par $x \mapsto (\sin x)/\cos x$, est périodique de période $T = \pi$, puisque $\sin(x+\pi) = -\sin x$ et $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

- Si T est une période de f, alors $2T, 3T, \cdots$ sont encore des périodes de T. Il y a donc une infinité de période, mais la plus intéressante est la plus petite.

Exemple 7.a en ligne

Exemple 7.b en ligne

- Quand on connaît la fonction f, et en particulier sa courbe représentative, sur un intervalle quelconque $[a,a+T]$, on la connaît partout. On obtient la courbe complète en effectuant des translations horizontales de vecteur $T\vec{i}$. Il suffit donc d'étudier la fonction sur un intervalle bien choisi de longueur T, en utilisant par exemple la parité éventuelle de la fonction.

Exemple 8 : La fonction $x \mapsto 5\cos 2x - 3\cos x + 4$ est périodique de période 2π, et paire. On l'étudie donc sur $[0,\pi]$ seulement, on complète avec une symétrie par rapport à l'axe vertical, puis on effectue les translations horizontales de longueur $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

4 Quelques fonctions courantes à connaître

1. Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$.
2. Les fonctions puissances $x \mapsto f_n(x) = x^n$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}$, paires si n est un entier pair et impaires sinon.
3. Les fonctions racines $x \mapsto f_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ si n est impair, mais uniquement sur $[0, +\infty[$ si n est pair. Si n est impair, f_n est une fonction impaire : $\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8}$.
4. Les fonctions $x \mapsto x^{p/q}$ où p et q sont deux entiers relatifs, $q > 0$. Elles sont définies *a priori* uniquement sur $]0, +\infty[$, par la formule $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$.
5. Les fonctions polynômes, et les fractions rationnelles (quotient de deux polynômes).
6. Les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente : elles sont périodiques.
7. La fonction logarithme $x \mapsto \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$ et la fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x) = e^x$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
8. Les fonctions hyperboliques : on définit $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, fonction impaire et $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$, fonction paire. On lit « sinus hyperbolique » pour la première et « cosinus hyperbolique » pour la seconde. Elles vérifient $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ pour tout x. *Leurs propriétés rappellent beaucoup celles des fonctions sinus et cosinus.*
9. La fonction « partie entière », étudiée dans la fiche suivante : c'est le plus grand entier $E(x)$ inférieur ou égal au réel x. À peu près l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Méthodologie

Les fonctions données par des formules explicites, et étudiées couramment, sont des sommes, produit, quotient, composées des fonctions basiques énumérées ci-dessus.

5 Fonction minorée, majorée, bornée

- Dans ce paragraphe, f est définie sur un domaine D, et E est une partie de D.
- Fonction majorée sur E :

> La fonction f est majorée sur E quand il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in E$.

Un tel réel M s'appelle majorant de f sur E. Il n'est pas unique, puisque tout réel $M' > M$ est encore un majorant de f sur E.

- Fonction minorée sur E :

La fonction f est minorée sur E quand il existe un réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in E$.

Un tel réel m s'appelle minorant de f sur E. Il n'est pas unique, puisque tout réel $m' < m$ est encore un minorant de f sur E.

Méthodologie

Dire que f est majorée sur E signifie que $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$. Dire que f est minorée sur E signifie que $f(E)$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.

- Fonction bornée sur E :

La fonction f est bornée sur E quand elle y est à la fois minorée et majorée.

Exemple 9 : La fonction $x \mapsto 1/x$ est minorée (par $m = 0$) sur $]0, +\infty[$, mais elle n'est pas majorée. Par contre, elle est majorée (par $M = 0$) sur $]-\infty,0[$, mais elle n'y est pas minorée.

Exemple 10 : La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x + 3\sin x}{x + 8}$ est bornée sur $E = [10, +\infty[$ puisque $0 < x - 3 \leq x + 3\sin x \leq x + 3 < x + 8$, et donc $0 < f(x) < 1$ sur E.

- Si l'on a $m \leq f(x) \leq M$ sur E, on a aussi $|f(x)| \leq \max(|m|,|M|)$: la fonction $|f|$ est majorée. Réciproquement, si $|f|$ est majorée, à savoir si $|f(x)| \leq C$ sur E, alors on a $-C \leq f(x) \leq C$ sur E et f est bornée.

Méthodologie

Une fonction est bornée sur E si et seulement si sa valeur absolue est majorée sur E.

6 Sens de variation sur un intervalle, taux d'accroissement

- Fonction croissante sur l'intervalle $\mathcal{I}$.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $\mathcal{I}$ quand elle **respecte** les inégalités, à savoir lorsque $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Exemple 11 : La fonction carré $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[2,5]$, mais elle n'est pas croissante sur $[-2,1]$, puisque $-2 < 1$ mais $f(-2) > f(1)$.

Cela équivaut à dire que pour tous $x_1 \neq x_2$ dans $\mathcal{I}$, la quantité $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est positive ou nulle.

- Fonction décroissante sur l'intervalle $\mathcal{I}$.

La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\mathcal{I}$ quand elle **renverse** les inégalités, à savoir lorsque $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemple 12 : La fonction carré $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $[-5,-2]$.

Cela équivaut à dire que pour tous $x_1 \neq x_2$ dans $\mathcal{I}$, la quantité $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est négative ou nulle.

- La croissance est stricte lorsque $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$; la décroissance est stricte lorsque $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.
- Sens de variation d'une fonction sur son domaine de définition :

Étudier les variations de f consiste, entre autre, à trouver les intervalles où elle est croissante et ceux où elle est décroissante.

Exemple 13 : Une étude poussée via la dérivée montre que $f : x \mapsto x^3 - 3x + 78$ est croissante sur $]-\infty,-1[$, décroissante sur $]-1,1[$ et croissante sur $]1,+\infty[$.

Point Danger

On parle de la monotonie d'une fonction sur chaque **intervalle** du domaine de définition. Sur un domaine qui n'est pas un intervalle, la notion de monotonie n'a globalement pas de sens.

Exemple 14 : La fonction $x \mapsto 1/x$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, puisque $-1 < 1$ mais $f(-1) < f(1)$.

Si x_1,x_2 appartiennent à un même **intervalle** du domaine de définition, la quantité $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ s'appelle taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2.

- Le taux d'accroissement intervient énormément dans la notion de dérivée. En physique, quand x est le temps et $f(x)$ la distance parcourue entre les temps 0 et x, le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 est la vitesse moyenne sur cet intervalle de temps.

7 Extrema locaux ou absolus

La fonction f présente un minimum local en x_0 quand il existe un voisinage $]x_0 - h, x_0 + h[$ sur lequel on a $f(x) \geq f(x_0)$.
Elle présente un maximum local en x_0 quand il existe un voisinage $]x_0 - h, x_0 + h[$ sur lequel on a $f(x) \leq f(x_0)$.

- Le terme « extremum » signifie maximum ou minimum, sans plus de précision.

Exemple 15 : La fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 78$ présente un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = 1$.

Exemple 16 : La fonction $x \mapsto (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ ne présente aucun extremum sur $\mathbb{R}$.

- Il y a un rapport étroit entre le sens de variation et les extrema locaux :

Si f est croissante à gauche de x_0 et décroissante à droite, elle présente un maximum local en x_0.
Si elle est décroissante à gauche de x_0 et croissante à droite, elle présente un minimum local en x_0.

- Cette situation correspond à l'immense majorité des cas. Mais il y a des cas particuliers plus étranges :

Exemple 17 en ligne

- Si l'on a $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in D$, on parle de maximum absolu en x_0, et si l'on a $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in D$, on parle de minimum absolu en x_0.

Exemple 18 : $f : x \mapsto x^2 - 1$ présente un minimum absolu en $x = 0$, et $g : x \mapsto -x^2 + 1$ présente un maximum absolu en $x = 0$. Ces extrema ont lieu au sommet de chaque parabole.

Méthodologie

Très souvent, on omet les adjectifs « local » ou « absolu » pour parler simplement de maximum ou minimum.

8 Fonction injective, bijective

- Fonction injective de E dans F.

On dit que f est injective sur E lorsque la relation $f(x_1) = f(x_2)$, où $x_1, x_2 \in E$, implique $x_1 = x_2$.

- Cela équivaut à dire que $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$. Graphiquement, une droite horizontale coupe la courbe $y = f(x)$ en **au maximum** un point.

Exemple 19 : La fonction sinus n'est pas injective sur $[0,2\pi]$, puisque $\sin \pi/6 = \sin 5\pi/6$, mais elle est injective sur $[-\pi/2,\pi/2]$.

- Bijection de E sur F.

> Soit f définie sur E et F une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f est une bijection de E sur F lorsque, pour tout $y \in F$, il existe un et un seul $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Exemple 20 : La fonction sinus est une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ sur $[-1,1]$, mais n'est pas une bijection de $[0,\pi]$ sur $[0,1]$ (puisque $\sin \pi/4 = \sin 3\pi/4$) ni une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ sur $[-2,3]$, puisque l'équation $\sin x = 3/2$ n'a pas de solution.

Méthodologie

Cette notion est reprise en détail dans la fiche 9 sur les fonctions réciproques.

9 Composition des fonctions

> Lorsque les domaines de définition lui donnent un sens, la composée $g \circ f$ est la fonction définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

Exemple 21 : Soit $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \sin x$ et $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = 3u - \sqrt{1-u^2}$. La composée $g \circ f$ a un sens et est définie sur $\mathbb{R}$ par $g \circ f(x) = g(\sin x) = 3\sin x - \sqrt{1-\sin^2 x}$, soit $g \circ f(x) = 3\sin x - |\cos x|$.

2 EXERCICES

Exercice 1

Donner les domaines de définitions des fonctions définies par

$$f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-5x+6}}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad h(x) = \frac{\sin 5x}{2x+|x-1|}$$

Exercice 2

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 7$.

1. Donner l'expression du taux d'accroissement de f entre deux réels x_1 et x_2.

2. Montrer que f est décroissante sur $]-\infty,2[$ et croissante sur $]2,+\infty[$. Qu'a-t-on en $x = 2$?

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto 2x - \cos x$. On admettra que $|\cos u - \cos v| \leq |u - v|$ pour tous u,v.

1. Montrer, avec la définition, que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que quel que soit $A > 0$, il existe x_1 tel que $f(x_1) > A$ et que quel que soit $B < 0$, il existe x_2 tel que $f(x_2) < B$.

3. En admettant (continuité) que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle au sens large, quel est-il ?

4. Montrer que f est injective, puis que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Étudier la parité de f. Majorer $|f(x)|$ et donner un majorant et un minorant de f sur $\mathbb{R}$.

2. Trouver, en revenant à la définition, le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$ et en déduire celui sur $]-\infty,0]$.

2 CORRIGÉS

Exercice 1

La fonction f est définie si et seulement si $x^2 - 5x + 6$ est strictement positif, i.e. sur $]-\infty,2[\cup]3,+\infty[$.

Pour g, c'est lorsque $x \neq -1$ et $(1-x)/(1+x) \geq 0$, i.e. sur $]-1,1]$.

La fonction h est définie quand $2x + |x-1| \neq 0$.

– Pour $x \geq 1$, on a $2x + |x-1| = 2x + x - 1 = 3x - 1$, qui ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$.
– Pour $x \leq 1$, on a $2x + |x-1| = 2x + 1 - x = x + 1$, qui s'annule en $x = -1$. La fonction est définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

Exercice 2

1. Le taux d'accroissement est donné par

$$\tau = \frac{(x_2^2 - 4x_2 - 7) - (x_1^2 - 4x_1 - 7)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2 - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 4.$$

2. Pour $x_1,x_2 \in [2,+\infty[$, on a $x_1 + x_2 \geq 4$ et le taux d'accroissement est positif : la fonction est croissante. Pour $x_1,x_2 \in]-\infty,2]$, on a $x_1 + x_2 \leq 4$, et le taux est négatif : la fonction est décroissante. On ne peut rien dire lorsque $x_1 < 2$ et $x_2 > 2$, par contre. En $x = 2$, on a un minimum local, puisque la fonction est décroissante à gauche puis croissante à droite.

Exercice 3

1. Prenons $x_1 \leq x_2$. On a

$$f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1) - (\cos x_2 - \cos x_1) \geq 2|x_2 - x_1| - |x_2 - x_1|$$

qui est donc une quantité positive. La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On a $f(x) \geq 2x - 1$ et $f(x) \leq 2x + 1$, puisque le cosinus est compris entre -1 et 1. Pour $x_1 > A/2 + 1/2$, on a $f(x_1) > A$. Pour $x_2 < B/2 - 1/2$, on a $f(x_2) < B$.

3. Pour tout $A > 0$ et $B < 0$, l'image de $[B/2 - 1/2, A/2 + 1/2]$ contient les points A et B, et donc tout le segment $[B,A]$ d'après le rappel de continuité admis pour l'instant. L'image $f(\mathbb{R})$ contient tout segment $[B,A]$ avec $B < 0$ et $A > 0$: c'est $\mathbb{R}$ tout entier.

4. La relation $f(x_1) = f(x_2)$, à savoir $2(x_1 - x_2) = \cos x_1 - \cos x_2$ implique $2|x_1 - x_2| = |\cos x_1 - \cos x_2|$, et donc $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|$. Ceci est possible uniquement avec $x_1 = x_2$, et f est injective. Comme $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution x. Comme f est injective, cette solution est unique. On a la définition d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Comme $|-x| = |x|$, la fonction f est impaire. On a $|f(x)| = \dfrac{|x|}{1+|x|}$ qui est plus petit que 1, puisque $1 + |x| > |x|$. Cela signifie que $-1 < f(x) < 1$: la fonction est minorée par -1 et majorée par 1.

2. Sur $[0,+\infty[$, on a $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. On en déduit $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{x_2 - x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}$: cette quantité est positive pour tous $0 < x_1 < x_2$, ce qui signifie que f est croissante sur $[0,+\infty[$.

Comme f est impaire, la fonction est encore croissante sur $]-\infty,0]$: soient en effet $y_1 < y_2 < 0$: on a $f(y_2) - f(y_1) = -(f(-y_2) - f(-y_1))$, avec $0 < -y_2 < -y_1$. La différence $f(-y_2) - f(-y_1)$ est alors négative et $f(y_2) - f(y_1)$ est positive.

COURS 3 Limites finies

[MOTS-CLÉS : LIMITE FINIE, ENCADREMENT, COMPOSITION, OPÉRATIONS, CONTINUITÉ, PROLONGEMENT]

On définit $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, où f est une fonction réelle de la variable réelle, définie au voisinage de x_0, mais pas nécessairement en x_0 ou bien au voisinage de $x_0 = -\infty$ ou de $x_0 = +\infty$. Mais ℓ est un réel dans toute cette fiche. La fiche suivante regardera les limites infinies.

1 Introduction naturelle et imagée de la notion de limite

- On a envie de dire que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 lorsque « plus x est proche de x_0, plus $f(x)$ est proche de ℓ ». C'est l'idée naturelle, mais elle ne permet pas la mise en forme de la définition.
- La comparaison balistique est parlante : on veut que notre projectile $f(x)$ puisse arriver aussi près que l'on veut de l'objectif ℓ, même si l'on n'est pas capable de tomber « pile » sur lui. On sera satisfait dans la situation suivante « quelle que soit la cible, aussi petite soit-elle, autour de ℓ, on peut trouver une fenêtre initiale autour de x_0 permettant de tomber dans la cible arrivée ».
- La définition rigoureuse de la limite va donc fixer **d'abord** une condition à l'arrivée, qui sera un intervalle « cible » de centre ℓ, et **ensuite** en déduire un intervalle « départ » de centre x_0 permettant aux valeurs $f(x)$ d'arriver dans la cible.
- Dans la notion de limite, x_0 et/ou ℓ sont des nombres réels ou bien $\pm\infty$. Toutefois, les définitions quantifiées sont légèrement différentes suivant ces cas de figure.
- L'expression « au voisinage de x_0 » signifie dans un intervalle de centre x_0, mais x_0 est généralement exclu dans cette fiche.

2 Définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ où x_0 et ℓ sont des réels

La fonction f tend vers le réel ℓ quand x tend vers x_0 lorsque l'on a :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} |x - x_0| < \alpha \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- Le cas intéressant de limite est lorsque f n'est pas définie en x_0. On exclut donc ce point x_0 de l'intervalle de départ, quel que soit le cas de figure.

Exemple 1 : La fonction $f : x \mapsto (\sin x)/x$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ seulement, mais elle tend vers 1 quand x tend vers 0.

Démonstration en ligne

Méthodologie

Bien comprendre que l'on fixe **d'abord** le « ε arrivée », et que l'on cherche **ensuite** un « α de départ » qui convient. On ne cherche pas le meilleur α possible, cela n'a pas de sens en général, on se contente d'un trouver un qui convienne.

- En bon français, et en termes de voisinages, la définition est : on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 lorsque pour tout voisinage de ℓ il existe un voisinage de x_0 qui (x_0 étant exclu) s'envoie entièrement par f dans ce voisinage arrivée autour de ℓ.

Exemple 2 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Sachant que $\sin x \in [-1{,}1]$, on a $\left|x^2 \sin(1/x) - 0\right| \leq |x|^2$. Soit ε positif donné : nous cherchons un α positif tel que $0 < |x| < \alpha$ implique $\left|x^2 \sin(1/x) - 0\right| < \varepsilon$. Si l'on impose $|x|^2 < \varepsilon$, (i.e. $|x| < \sqrt{\varepsilon}$), alors on a obligatoirement $\left|x^2 \sin(1/x) - 0\right| < \varepsilon$. Une valeur de α qui convient est donc $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$, mais toute valeur strictement positive inférieure convient encore.

Exemple 3.a : La fonction f définie sur $[-3, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+3}$ tend vers 2 quand x tend vers 1. En multipliant (et divisant) $\left|\sqrt{x+3} - 2\right|$ par la quantité conjuguée, on obtient $\left|\sqrt{x+3} - 2\right| = \dfrac{|x-1|}{2+\sqrt{x+3}}$ où le dénominateur est toujours plus grand que 2. On a donc $\left|\sqrt{x+3} - 2\right| \leq |x-1|/2$. Soit ε positif donné : nous cherchons un α positif tel que $0 < |x-1| < \alpha$ implique $\left|\sqrt{x+3} - 2\right| < \varepsilon$. Si nous imposons $|x-1|/2 < \varepsilon$, alors nous avons $\left|\sqrt{x+3} - 2\right| < \varepsilon$. Il suffit de prendre $\alpha = 2\varepsilon$.

- La grande idée de simplification des calculs est la suivante :

Méthodologie

Soit $C(x)$ une quantité **compliquée** que l'on veut rendre plus petite qu'un nombre ε donné. Supposons que l'on ait trouvé une quantité **simple** $S(x)$ telle que $C(x) < S(x)$. Alors si nous imposons que $S(x)$ soit plus petit que ε, nous aurons a fortiori $C(x) < \varepsilon$ puisque $C(x) < S(x) < \varepsilon$.

- Attention, une fonction quelconque n'a aucune raison d'admettre une limite en un point.

Exemple 4 : La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x/|x|$ n'a pas de limite quand x tend vers 0 : elle est égale à -1 pour $x < 0$ et à 1 pour $x > 0$.

3 Définition de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$ où ℓ est un réel

- Un voisinage de $+\infty$ est une demi-droite $]A,+\infty[$, où l'on peut toujours supposer $A > 0$ et même « très grand ». La définition quantifiée de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ est :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists A > 0) \quad \text{tel que} \quad (x > A \quad \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

- Un voisinage de $-\infty$ est une demi-droite $]-\infty,A[$, où l'on peut toujours supposer $A < 0$, très grand en valeur absolue. La définition quantifiée de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ est :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists A < 0) \quad \text{tel que} \quad (x < A \quad \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

Exemple 5.a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{x-2} = 3$. On a $|f(x) - 3| = \dfrac{5}{x-2}$, en se limitant aux $x > 2$. Pour avoir $\dfrac{5}{x-2} < \varepsilon$, il suffit d'avoir $x > 2+5/\varepsilon$, et $A = 2+5/\varepsilon$ convient. De même, avec $A = 2 - 5/\varepsilon$, on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

Méthodologie

Dans la suite de la fiche, on notera x_0, que l'on soit en un réel ou en $\pm\infty$. Si l'on est à l'infini, on remplacera le voisinage $]x_0 - \alpha,x_0 + \alpha[$ par $]A, +\infty[$ ou $]-\infty,A[$.

4 Du bon usage des ε et des α

- C'est majoritairement dans les questions théoriques que l'on utilise la définition quantifiée de la limite en un point. Sur les exemples pratiques, on utilise les opérations élémentaires qui seront détaillées plus loin. Elle sert aussi à montrer par l'absurde qu'une fonction n'a pas de limite.

Méthodologie

La définition avec ε et α suppose que l'on connaisse a priori la valeur de la limite, par exemple qu'on l'a devinée ou qu'on nous l'a donnée.

Exemple 6 en ligne

- La quantité α que l'on arrive à calculer dépend toujours de ε. Plus cet ε sera « petit », plus α sera petit lui aussi. La définition dit que l'on peut prendre ε quelconque, mais en pratique, il est moralement très petit...

- Traditionnellement, on prend des inégalités strictes $|x-x_0| < \alpha$ et $|f(x)-\ell| < \varepsilon$. Mais on peut travailler avec des inégalités larges, aucun souci.
- Connaître une valeur de α en fonction de ε peut avoir un intérêt en terme de contrôle d'erreur : si l'on veut savoir à partir de quel moment une mesure $f(x)$ approche une valeur théorique ℓ à moins de ε près, l'intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ donne une idée.

Exemple 3.b : Si $0.998 < x < 1.002$, l'exemple 3.a nous dit que $1.999 < \sqrt{x+3} < 2.001$. Si l'on accepte une erreur de 0.001 sur le résultat, alors une incertitude de 0.002 sur x est acceptable.

5 Propriétés des limites finies

- Personne n'a jamais douté de ces propriétés *logiques et qui semblent évidentes*, mais il est bon de les énoncer clairement.
- Unicité de la limite en x_0 :

Théorème 1. Si f admet une limite ℓ quand x tend x_0, alors cette limite est unique.

On ne peut pas être « très voisin » de deux nombres différents. La démonstration, donnée en ligne, est fondamentale, et doit être bien maîtrisée.

Démonstration en ligne

- Si f admet une limite finie ℓ quand x tend vers x_0, alors elle est **bornée** au voisinage de x_0.
  Démonstration. En prenant $\varepsilon = 1$, on trouve un intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ sur lequel $\ell-1 < f(x) < \ell+1$: la fonction est minorée et majorée au voisinage de x_0.
- Signe de la limite en x_0, deux énoncés :

Théorème 2. Si f admet une limite strictement positive quand x tend vers x_0, alors f est strictement positive au voisinage de x_0.

Démonstration. Soit $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, et écrivons la définition de la limite avec $\varepsilon = \ell/2$. Il vient un intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ sur lequel nous avons $\ell-\ell/2 < f(x) < \ell+\ell/2$, ce qui implique que f est strictement positive dans cet intervalle.

Théorème 2 bis. Si f est positive ou nulle au voisinage de x_0, et si elle admet une limite finie ℓ en x_0, alors ℓ est positive ou nulle.

Démonstration. Si la limite était strictement négative, alors f serait strictement négative au voisinage de x_0, ce qui n'est pas.

Point Danger

Il arrive que f soit strictement positive au voisinage de x_0, mais que sa limite en x_0 soit nulle. Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

Exemple 7 : La fonction $x \in]0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi[\mapsto \cos^2 x$ est strictement positive, mais sa limite en $\pi/2$ est nulle.

- Le signe de la limite se généralise : soient A,B deux constantes telles que $A \leq f(x) \leq B$ au voisinage de x_0. Si f admet une limite ℓ en x_0, alors $A \leq \ell \leq B$.
- Si f tend vers ℓ quand x tend vers x_0, alors la fonction $|f|$ tend vers $|\ell|$ quand x tend vers x_0. Cela vient de la majoration $\Big||f(x)| - |\ell|\Big| \leq |f(x) - \ell|$. Mais la réciproque est fausse : la fonction f égale à -1 sur $]-\infty,0[$ et égale à 1 sur $]0,+\infty[$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, alors que $|f|$, constante égale à 1, tend vers $\ell = 1$ quand x tend 0.

Méthodologie

Tous ces résultats « évidents » servent essentiellement dans les raisonnements théoriques.

6 Continuité en un point x_0

- La fiche 5 sera consacrée à cette notion fondamentale, mais nous en avons besoin ici, et ce n'est pas une notion compliquée au départ.

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0, le point x_0 étant inclus. On dit que f est continue en x_0 lorsque $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

- Cette définition signifie donc deux choses (i) la fonction f admet une limite quand x tend vers x_0, (ii) cette limite est égale à $f(x_0)$. Avec des quantificateurs la continuité en x_0 s'écrit

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0) \quad \text{tel que} \quad \Big(|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\Big)$$

Méthodologie

Une fonction continue en x_0 ne présente pas de « saut » en ce point. On peut tracer son graphe sans « lever le crayon » au point $M_0(x_0,f(x_0))$.

- Quand une fonction n'est pas continue en un point, on dit qu'elle y présente une discontinuité.

Exemple 8.a : La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin(1/x)$ est continue en tout point x_0 non nul. Prenons par exemple $x_0 > 0$. La formule $\sin p - \sin q = 2\sin[(p-q)/2]\cos[(p+q)/2]$ et les inégalités $|\sin u| \leq |u|$ et $|\cos u| \leq 1$ donnent la majoration $|f(x) - f(x_0)| \leq \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| = \dfrac{|x-x_0|}{|x||x_0|}$.

Exemple 8.b : En prenant x dans **l'intervalle** $]x_0/2{,}3x_0/2[$, on est certain que x ne prend pas la valeur 0 et que $1/|x|$ est **majoré** par $2/x_0$. Il en résulte que $|1/x - 1/x_0|$ est plus petit que $2|x-x_0|/x_0^2$.

Exemple 8.c : Dans l'intervalle $]x_0/2{,}3x_0/2[$, nous avons donc $|f(x) - f(x_0)| \leq 2|x - x_0|/x_0^2$. Si nous imposons $|x - x_0| < \varepsilon x_0^2/2$, alors nous avons $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Le nombre α trouvé dépend clairement de ε et du point x_0.

Exemple 9 en ligne

- Toutes les fonctions « classiques », polynômes, fractions rationnelles, racine carrée, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus ... sont continues en tout point où elles sont définies, ainsi que leurs sommes, produits, quotients, composées.

Méthodologie

Dans la solution d'un exercice, on écrit simplement que f est continue en x_0 comme composée de fonctions continues. On ne le redémontre pas, mais on le dit.

7 Prolongement par continuité en un point x_0

- Il arrive souvent que l'on travaille avec une fonction f définie au voisinage d'un point x_0 mais a priori non définie au point x_0, et admettant une limite ℓ quand x tend vers x_0.

On prolonge alors par continuité la fonction f en $x = x_0$ en posant $f(x_0) = \ell$. La fonction ainsi prolongée se note encore f, et elle est continue en x_0.

Exemple 10 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (\sin x)/x$ pour $x \neq 0$; comme on sait que f tend vers 1 quand x tend vers 0, on pose $f(0) = 1$ pour obtenir une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Méthodologie

Prolonger une fonction par continuité en x_0 revient simplement à « réparer un oubli » fait au moment de la définition.

Exemple 11 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$. Les résultats classiques sur l'exponentielle impliquent que f tend vers 1 quand x tend vers 0. On prolonge donc f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. *On a maintenant une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et continue en chaque point.*

8 Théorème d'encadrement (gendarmes)

Théorème 3. Soient f,g,h trois fonctions définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, telles que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout x de ce voisinage. Si f et h admettent la même limite ℓ quand x tend vers x_0, alors g tend aussi vers ℓ quand x tend vers x_0.

Démonstration en ligne

Exemple 12 : Sachant que $-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on peut conclure avec le théorème d'encadrement que $\lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

Exemple 5.b : Soit $g : x \mapsto \dfrac{3x + \sin x}{x - 2}$. Comme $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a $\dfrac{3x-1}{x-2} \leq \dfrac{3x + \sin x}{x - 2} \leq \dfrac{3x+1}{x-2}$ pour tout $x > 2$. L'exemple 5 (pour l'inégalité de gauche) et un calcul analogue pour celle de droite, montrent que g tend vers 3 quand x tend vers $+\infty$.

9 Opérations sur les limites finies

- Dans ce paragraphe, f et g sont définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, et admettent les limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 quand x tend vers x_0.

La somme $f + g$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$ et le produit $f \times g$ tend vers $\ell_1 \times \ell_2$ quand x tend vers x_0.

Démonstration en ligne

- La démonstration du produit demande un cas particulier très important :

Soit f et g définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, telles que f **tende vers** 0 quand x tend vers x_0 et que g soit **bornée** au voisinage de x_0. Alors le produit $f \times g$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Démonstration en ligne

- Le quotient demande plus de précautions, car le dénominateur ne doit pas s'annuler :

Si $\ell_2 \neq 0$, alors le quotient f/g est défini au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, et tend vers ℓ_1/ℓ_2 quand x tend vers x_0.

- Il y a le cas particulier de l'inverse : si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ est non nulle, alors l'inverse $1/f$ tend vers $1/\ell$ quand x tend vers x_0.

Démonstration en ligne

Exemple 13 : En écrivant $\dfrac{3x^2+4x-\sin x+4}{x^2-x+\cos x} = \dfrac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4-\sin x}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{\cos x}{x^2}}$, on vérifie que cette fonction est bien définie au voisinage de $+\infty$, et les théorèmes sur la somme, le produit, le quotient et l'encadrement permettent de conclure qu'elle tend vers 3 quand x tend vers $+\infty$.

- Les résultats précédents s'appliquent au cas des fonctions continues en x_0 :

> Si f et g sont continues en x_0, alors la somme $f+g$ et le produit $f\times g$ sont continues en x_0. Si $g(x_0)\neq 0$, alors le quotient f/g est défini au voisinage de x_0, et continu en ce point.

10 Composition des limites

- Rappelons que la composée $g\circ f$ est définie par $(g\circ f)(x) = g\Big(f(x)\Big)$.

> **Théorème 4.** Si la fonction f admet la limite ℓ quand x tend vers x_0 et si la fonction g est **continue** en $x=\ell$, alors la fonction composée $g\circ f$ tend vers $g(\ell)$ quand x tend vers x_0.

Démonstration. Soit ε positif donné, et soit l'intervalle $]g(\ell)-\varepsilon, g(\ell)+\varepsilon[$. D'après la définition des limites, il existe un intervalle $]\ell-\beta,\ell+\beta[$ qui s'envoie entièrement par la fonction g dans cet intervalle arrivée autour de $g(\ell)$. Considérons maintenant cet intervalle $]\ell-\beta,\ell+\beta[$ comme intervalle **arrivée** pour la fonction f : il existe un intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ qui s'envoie par f dans l'intervalle $]\ell-\beta,\ell+\beta[$. Par composition, l'intervalle $]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ s'envoie par $g\circ f$ dans l'intervalle final $]g(\ell)-\varepsilon, g(\ell)+\varepsilon[$.

Remarque : dans la définition d'une limite en un point x_0, la fonction n'est pas toujours définie en x_0. Ici nous sommes obligés de supposer que g est définie **continue** en ℓ car il est possible que f prenne la valeur ℓ de sa limite pour certaines valeurs de x.

- Le théorème 4 s'énonce plus simplement avec deux fonctions continues : si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors la composée $g\circ f$ est continue en x_0.

Exemple 14 : Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\phi(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. La relation $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$ permet d'écrire $\phi(x) = 2\dfrac{\sin^2(x/2)}{x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$.
Nous avons donc $\phi = h\circ g\circ f$ avec $f : x\mapsto x/2$, g définie par $g(u) = \sin u/u$ (et $g(0)=1$) et $h : v\mapsto v^2/2$. Quand x tend vers 0, $f(x)$ tend vers 0 ; quand u tend vers 0, $g(u)$ tend vers 1 et quand v tend vers 1, $h(v)$ tend vers $1/2$. Deux applications du théorème donnent $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x) = 1/2$. On notera que les trois fonctions utilisées sont continues aux points considérés.

11 Limite à droite, à gauche de x_0

- Les définitions de limite données aux paragraphes précédents s'appliquent quand on travaille au voisinage d'un point x_0, c'est-à-dire que x peut tendre vers x_0 aussi bien en étant plus petit que x_0 (on dit à gauche de x_0) qu'en étant plus grand que x_0 (à droite de x_0). Parfois, lors de l'étude d'une fonction au voisinage de x_0, on s'intéresse **uniquement** aux valeurs de x supérieures (ou inférieures) à x_0. Il faut alors donner une définition de la limite ne faisant intervenir qu'un intervalle de la forme $]x_0-\alpha, x_0[$ ou $]x_0, x_0+\alpha[$ au lieu de l'intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$.

La fonction f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0) \text{ tel que } (x \in]x_0, x_0+\alpha[\implies |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$

On note $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

- On a une définition analogue quand x tend vers x_0 à gauche, en utilisant l'intervalle $x \in]x_0-\alpha, x_0[$.

Point **Terminologie**

« À droite de x_0 » se dit aussi « x_0 par valeurs supérieures » et « à gauche de x_0 » se dit aussi « x_0 par valeurs inférieures ».

- Une fonction admet une limite en x_0 si et seulement si elle y admet une limite à droite et une limite à gauche, et que ces deux limites sont égales.
- Les notions de continuité en un point et de limite à droite ou à gauche donnent naissance à la notion de continuité à droite ou à gauche d'une fonction f en un point x_0 :
  1. Si f est définie sur un intervalle $[x_0, x_0+h[$, on dit qu'elle est continue à droite de x_0 lorsque $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
  2. Si f est définie sur un intervalle $]x_0-h, x_0]$, on dit qu'elle est continue à gauche de x_0 lorsque $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
- Une fonction est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de x_0.

Méthodologie

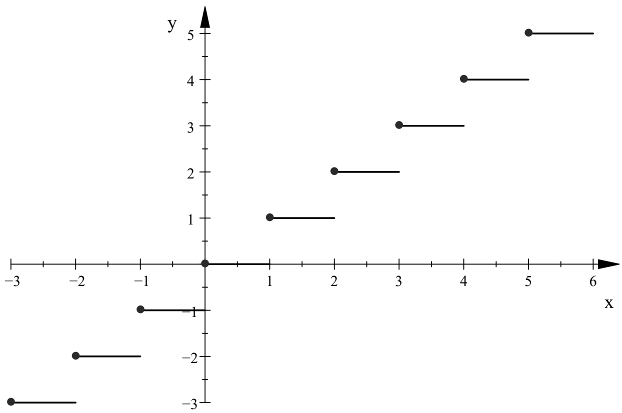
La notion de limite à droite et à gauche intervient surtout avec les limites infinies, quand le dénominateur de f s'annule en x_0, à voir dans la fiche suivante.

12 La fonction partie entière

- Il s'agit du meilleur exemple de limite finie à droite et à gauche. Cette fonction doit être parfaitement maîtrisée.

Pour tout réel x, on appelle partie entière de x le plus grand entier inférieur ou égal à x ; on le note $[x]$ ou $E(x)$. Il est caractérisé par l'encadrement $E(x) \leq x < 1 + E(x)$.

- Sur chaque intervalle $[n,n+1[$ où n est un entier relatif on a donc $E(x) = n$. **Valeurs exemples :** on a $E(3) = 3$, $E(3.67) = 3$, $E(0) = 0$, $E(0.87) = 0$, $E(-0.87) = -1$, $E(-3.65) = -4$, $E(-4) = -4$...
- La fonction $E(x)$ est constante au voisinage de chaque réel non entier. Si n est un nombre entier on a $E(x) = n$ à droite de n (sur l'intervalle $[n,n+1[$) et $E(x) = n-1$ à gauche de n (sur l'intervalle $[n-1,n[$).
- En tout point entier n la fonction partie entière admet une limite à gauche égale à $n-1$ et une limite à droite égale à n : $\lim\limits_{x \to n^-} E(x) = n-1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} E(x) = n$.



- La courbe représentative est une réunion de segments horizontaux. Pour chacun, l'extrémité gauche (marquée par un •) est incluse mais l'extrémité droite est exclue. En terme de continuité, la fonction partie entière est continue en tout x_0 non entier relatif, est continue à droite de tout x_0 entier relatif, et n'est jamais continue à gauche d'un x_0 entier relatif.

13 Cas des fonctions monotones sur un intervalle

- Dans le cas d'une fonction monotone sur un intervalle $]a,b[$, avec $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$ autorisés, on a un théorème théorique affirmant l'existence de limites finies, sans que l'on puisse donner leurs valeurs.

Théorème 5. Soit f une fonction monotone sur $]a,b[$. En tout point $x_0 \in]a,b[$, f admet une limite à droite et une limite à gauche.

Démonstration en ligne

- Cette démonstration nous dit entre autre que si f est croissante, on a $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, et que si f est décroissante, on a $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Exemple 15 : La fonction partie entière, croissante *de façon évidente* sur $\mathbb{R}$, a une limite à droite et une limite à gauche de chaque point.

- Aux extrémités a et b de l'intervalle, on a les résultats suivants, aussi conséquences de la preuve du théorème 5 :
  1. Si f est croissante et minorée sur $]a,b[$, elle admet une limite finie en a^+.
  2. Si f est croissante et majorée sur $]a,b[$, elle admet une limite finie en b^-.
  3. Si f est décroissante et majorée sur $]a,b[$, elle admet une limite finie en a^+.
  4. Si f est décroissante et minorée sur $]a,b[$, elle admet une limite finie en b^-.
  5. Dans les quatre cas de figure, si la fonction n'est pas majorée ou minorée, elle tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ en a^+ ou b^-.

Méthodologie

On n'a pas besoin de ces résultats quand on étudie une fonction explicite. Ils servent dans les démonstrations théoriques.

Exemple 16 : Soit f croissante et majorée sur $]a,b[$, a priori non définie en $x = b$. Comme elle admet une limite finie ℓ à gauche de b, on peut la prolonger par continuité en b en posant $f(b) = \ell$.

14 Récapitulatif : comment calculer la majorité des limites finies

- Faisons le tour des techniques de calcul d'une limite explicite. L'utilisation de la définition avec ε et α est quasiment réservée aux démonstrations théoriques. Les cas possibles sont :
  1. Le cas banal où la fonction f est continue en x_0, et la limite est $f(x_0)$. On fait une phrase pour justifier cette continuité ou bien on dit que l'on a des sommes, produits, composées de limites et on conclut.
  2. Le cas où l'on encadre une fonction « compliquée » par deux fonctions plus « simples » ayant la même limite, et le théorème des gendarmes.
  3. Le cas où l'écriture de f, tout en faisant intervenir des fonctions continues en x_0, ne permet pas de conclure si f admet une limite en x_0. Pour $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{3x - \sin x}$ en 0 (voir exemple 17 ci-dessous), numérateur et dénominateur sont continus en $x = 0$, mais il y a un problème pour le quotient. Le problème vient d'une mauvaise écriture de f, il faut modifier cette écriture comme on peut. On parle de forme indéterminée.

Exemple 17 : On écrit $f(x) = \dfrac{1 + \sin x/x}{3 - \sin x/x}$, en simplifiant en haut et en bas par x. On fait apparaître la fonction ϕ définie par $\phi(x) = \sin x/x$ pour $x \neq 0$ et $\phi(0) = 1$: cette fonction est continue en $x = 0$, et la fonction $f = \dfrac{1+\phi}{3-\phi}$ est définie au voisinage de $x = 0$, continue en $x = 0$ comme quotient de telles fonctions. Notre limite est simplement $\dfrac{1+\phi(0)}{3-\phi(0)} = 1$.

4. Le cas où f est définie par deux expressions différentes à droite et à gauche de x_0. On regarde s'il y a une limite à droite et une limite à gauche, et si elles sont égales.

Exemple 18 : Soit f définie par $f(x) = \sin x/x$ pour $x < 0$ et $f(x) = \cos 2x$ pour $x > 0$. On a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ et aussi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. La fonction admet la même limite à droite et à gauche de 0, et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. On la prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

5. Le cas des limites en $\pm\infty$, qui font presque toujours intervenir les « formes indéterminées ». On verra les techniques dans la fiche suivante.

Je m'entraîne en ligne
Exercices supplémentaires 5,6,8
www.lienmini.fr/exanalyse3

ϕ désigne la fonction définie par $\phi(x) = (\sin x)/x$ pour $x \neq 0$ et $\phi(0) = 1$.

Exercice 1

Trouver un majorant et un minorant *évidents* de $\dfrac{x+2}{x+5}$ sur $[-1,1]$. En déduire, pour chaque $\varepsilon > 0$, un $\alpha > 0$ tel que $|x| < \alpha \implies \left|\dfrac{x^2+3x+5}{x+5} - 1\right| < \varepsilon$ et conclure.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto x + 1/x$. Montrer, avec la définition, que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. On commencera par choisir un intervalle $]1-h, 1+h[$ ne contenant pas 0 et trouver un $M > 0$ tel que $|f(x) - 2| \leq M|x-1|^2$ sur cet intervalle.

Exercice 3

En revenant à la définition de la limite et de la continuité, montrer que la fonction racine carrée est continue en $x_0 = 4$. On pensera à la quantité conjuguée.

Exercice 4

En revenant à la définition avec ε et A, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3+\sin x}{x-1} = 2$. On donner une expression de A en fonction de ε.

Exercice 7

Les limites à calculer ici sont toutes finies, mais on doit modifier l'écriture de chaque fonction en utilisant la quantité conjuguée ou la fonction ϕ. On utilisera aussi $1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$. Ce sont des premières approches des formes indéterminées, vues plus en détail dans la fiche suivante.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos 6x}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\tan 5x}$

3 CORRIGÉS

Exercice 1

Les quantités $x+2$ et $x+5$ sont positives, sur $[-1{,}1]$, avec $x+2 < x+5$. Le quotient est donc compris entre 0 et 1. On a ainsi $\left|\dfrac{x^2+3x+5}{x+5}-1\right| = |x| \times \left|\dfrac{x+2}{x+5}\right| < |x|$ sur $[-1{,}1]$. Pour avoir $\left|\dfrac{x^2+3x+5}{x+5}-1\right| < \varepsilon$, il suffit donc de réaliser $|x| < \varepsilon$. On peut prendre $\alpha = \varepsilon$, à condition de se limiter à $\varepsilon < 1$, de façon à rester dans $[-1{,}1]$ pour que la majoration ait un sens. On vient de montrer, via la définition, que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x+5}{x+5} = 1$. *Ce résultat est évident par ailleurs, puisqu'on a une fonction continue en $x=0$, avec $f(0)=1$.*

Exercice 2

On a $f(x)-2 = (x-1)^2/x$. En se plaçant sur $]1/2;3/2[$, on a $0 < f(x)-2 < 2(x-1)^2$, puisque $1/x < 2$. Pour avoir $|f(x)-2| < \varepsilon$, il suffit donc d'avoir $2(x-1)^2 < \varepsilon$, à savoir $|x-1| < \sqrt{\varepsilon/2}$. On peut prendre $\alpha = \sqrt{\varepsilon/2}$, en prenant ε « petit » pour rester dans $]1/2;3/2[$.

Exercice 3

On écrit $\sqrt{x}-\sqrt{4} = \dfrac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{4})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{4}} = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$. On en déduit $|\sqrt{x}-2| < |x-4|/2$, puisque $\sqrt{x}+2 > 2$ pour tout $x > 0$, et donc au voisinage de 4. Soit $\varepsilon > 0$: pour avoir $|\sqrt{x}-\sqrt{4}| < \varepsilon$, il suffit de réaliser $|x-4| < 2\varepsilon$. La valeur $\alpha = 2\varepsilon$ convient, et on vient de montrer que $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4}$. On a la définition de la continuité en $x=4$.

Exercice 4

On a $|f(x)-2| = \left|\dfrac{5+\sin x}{x-1}\right|$, quantité inférieure ou égale $6/|x-1|$, puisqu'un sinus est compris entre -1 et 1. Limitons-nous aux $x > 1$, puisque l'on fait tendre x vers $+\infty$. Pour avoir $|f(x)-2| < \varepsilon$, il suffit de réaliser $6/(x-1) < \varepsilon$, soit $x > 1+6/\varepsilon$. On peut donc prendre $A = 1+6/\varepsilon$.

Exercice 7

Numérateur et dénominateur s'annulent au point x_0 donné dans chaque cas : on a des formes indéterminées.

1. On utilise $b-a = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ pour écrire $a(x) = \dfrac{(\sqrt{x+1})^2-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$, soit $a(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$. Le dénominateur tend vers 2 et le quotient vers $1/2$.

2. Même principe : on écrit $\sqrt{2x+1}-3 = \dfrac{2(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3}$ et $\sqrt{x-2}-\sqrt{2} = \dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}$. La simplification par $x-4$ donne $b(x) = 2\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}$. Le numérateur tend vers $2\sqrt{2}$, le dénominateur vers 6, et le quotient tend donc vers $2\sqrt{2}/3$.

3. On écrit $1 - \cos 6x = 2\sin^2 3x$, et on a $c(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}$. On écrit ensuite $\sin x = x\phi(x)$ et $\sin 3x = 3x\phi(3x)$. L'élévation aux carrés, suivie d'une simplification par x^2 donne $c(x) = \dfrac{\phi(x)^2}{2 \times 9 \times \phi(3x)^2}$. La limite classique de ϕ en 0 donne finalement $\lim\limits_{x\to 0} c(x) = 1/18$.

4. Même principe que (c), en commençant par $d(x) = \cos 5x \times \dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$, puis $d(x) = \cos 5x \times \dfrac{4\phi(4x)}{5\phi(5x)}$. La limite est donc égale à $4/5$.

COURS

4 Limites infinies et formes indéterminées

[MOTS-CLÉS : LIMITE INFINIE, « $\infty - \infty$ », « ∞/∞ », « $0/0$ », « $0 \times \infty$ », LIMITES CLASSIQUES]

1 Définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

- La formulation en bon français est la même que pour les limites finies, en remplaçant le voisinage de ℓ par un voisinage de $+\infty$, à savoir une demi-droite $]B,+\infty[$ ou de $-\infty$, à savoir une demi-droite $]-\infty,B[$.

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 lorsque

$$(\forall B > 0)(\exists \alpha > 0) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} |x - x_0| < \alpha \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies f(x) > B.$$

Exemple 1 : On a $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Il suffit de prendre $|x-1| < 1/\sqrt{B}$ pour avoir $f(x) > B$. On prend $\alpha = 1/\sqrt{B}$.

- De même, f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 lorsque

$$(\forall B < 0)(\exists \alpha > 0) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} |x - x_0| < \alpha \\ x \neq x_0 \end{cases} \implies f(x) < B.$$

Méthodologie

En pratique, il est rare qu'une fonction tende vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 à droite et à gauche. En général, elle tend vers $+\infty$ d'un côté de x_0 et vers $-\infty$ de l'autre. Les définitions suivantes sont donc plus utiles.

2 Limite infinie quand x tend vers x_0 à droite

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 à droite lorsque

$$(\forall B > 0)(\exists \alpha > 0) \quad \text{tel que} \quad (x \in]x_0, x_0 + \alpha[\implies f(x) > B).$$

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 à droite lorsque

$$(\forall B < 0)(\exists \alpha > 0) \quad \text{tel que} \quad (x \in]x_0, x_0 + \alpha[\implies f(x) < B).$$

Exemple 2.a : On a $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{4}{x-2} = +\infty$. En effet, pour rendre $\dfrac{4}{x-2} > B$ (avec $B > 0$), il suffit d'avoir $0 < x - 2 < 4/B$: on prend $\alpha = 4/B$.

Exemple 2.b : On a $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{5+\sin x}{x-2} = +\infty$. Sachant que $\sin x$ est compris entre -1 et 1, on a $6 \geq 5+\sin x \geq 4$. Pour rendre $\dfrac{5+\sin x}{x-2} > B$, il suffit d'avoir $\dfrac{4}{x-2} > B$. On prend donc $\alpha = 4/B$ comme précédemment.

Méthodologie

Pour rendre une quantité « compliquée » $C(x)$ plus grande que B, il suffit de trouver une quantité « simple » $S(x)$ telle que $C(x) > S(x)$ et de réaliser $S(x) > B$.

3 Limite infinie quand x tend vers x_0 à gauche

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche lorsque

$$(\forall B > 0)(\exists \alpha > 0) \quad \text{tel que} \quad (x \in]x_0-\alpha, x_0[\implies f(x) > B).$$

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche lorsque

$$(\forall B < 0)(\exists \alpha > 0) \quad \text{tel que} \quad (x \in]x_0-\alpha, x_0[\implies f(x) < B).$$

Exemple 3.a : On a $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{4}{x-2} = -\infty$. En effet $\dfrac{4}{x-2} < B$ (avec $B < 0$ et $x-2 < 0$) équivaut encore à $4/B < x-2$, soit donc $2+4/B < x < 2$.

Point Danger

Attention aux manipulations d'inégalités avec des nombres négatifs, quand on multiplie ou divise.

Exemple 3.b : On a $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5+\sin x}{x-2} = -\infty$. Sachant que $\sin x$ est compris entre -1 et 1, on a $4 \leq 5+\sin x \leq 6$ et $\dfrac{6}{x-2} \leq \dfrac{5+\sin x}{x-2} \leq \dfrac{4}{x-2}$ pour $x < 2$. Pour rendre $\dfrac{5+\sin x}{x-2} < B$ (avec $B < 0$), il suffit d'avoir $4/(x-2) < B$. On prend donc $2+4/B < x < 2$ comme précédemment. *Dans ces deux exemples, on prend $\alpha = -4/B$, qui est bien positif.*

Méthodologie et Danger

Utiliser la définition quantifiée d'une limite égale à $-\infty$ introduit de gros risques d'erreur.

Toutes les maths

ANALYSE
EN 40 FICHES

L1
L2
CAPES

Ce livre regroupe l'ensemble de l'analyse enseignée en L1-L2 et au sein des **CPGE.** Véritable **outil pratique,** ses **40 fiches** mettent en valeur toutes les notions importantes que les étudiants doivent maîtriser.

Dans le livre :

- L'ensemble des énoncés de cours
- Les démonstrations essentielles
- Des exemples et des exercices corrigés

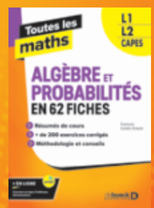
En fiches téléchargeables facilement accessibles :

- La majorité des démonstrations
- Des exemples et des exercices corrigés supplémentaires
- L'ensemble des problèmes récapitulatifs

Ce livre est aussi une excellente base pour s'entraîner à la préparation aux concours de l'enseignement.

L'auteur
François Cottet-Emard a enseigné l'analyse à l'Université de Paris-Saclay en licence.

+ Retrouvez aussi :



ISBN : 978-2-8073-2851-8

www.deboecksuperieur.com

L1
L2
CAPES

ANALYSE EN 40 FICHES
François Cottet-Emard

Toutes les maths

L1
L2
CAPES

ANALYSE
EN 40 FICHES

François
Cottet-Emard

- **Résumés de cours**
- **+ de 140 exercices corrigés**
- **Méthodologie et conseils**

+ EN LIGNE **OFFERT**

Exercice corrigés, problèmes, démonstrations

deboeck SUPÉRIEUR